

VISIT...

LANZAROTE
Caliente.com

К Л А С С И К И
Е С Т Е С Т В О З Н А Н И Я



М А Т Е М А Т И К А
М Е Х А Н И К А
Ф И З И К А
А С Т Р О Н О М И Я



ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ
ЛИТЕРАТУРЫ

МОСКВА-ЛЕНИНГРАД-1950

НАЧАЛА ЕВКЛИДА

КНИГИ XI-XV

*Перевод с греческого
и комментарии*

Д.Д.МОРДУХАЙ-БОЛТОВСКОГО

*при редакционном
участии*

И. Н. ВЕСЕЛОВСКОГО

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ
ЛИТЕРАТУРЫ

МОСКВА • ЛЕНИНГРАД • 1950

11-5-4

ОТ ИЗДАТЕЛЬСТВА

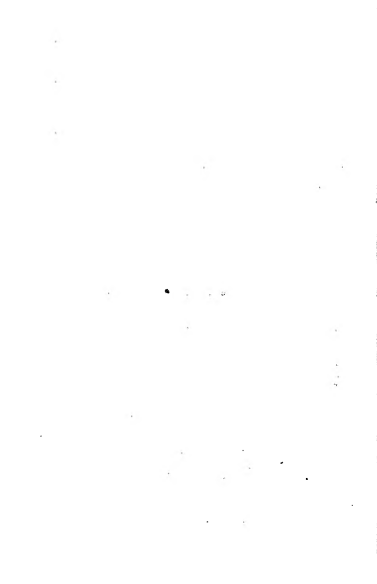
Предлагаемая вниманию читателя книга представляет собою третий, заключительный том нового русского издания «Начал» Евклида — классического произведения античной математической мысли, составляющего ещё и в наши дни основу курса элементарной геометрии. Третий том нашего издания содержит не только XI, XII и XIII книги «Начал», бесспорно принадлежащие Евклиду и посвященные в основном стереометрии, но также XIV и XV книги, которые хотя и примыкают тесно к предшествующим, но, как было установлено уже в XVI столетии, написаны другими авторами *).

Перевод выполнен с наиболее достоверного греческого текста (в издании И. Л. Гейберга) профессором Д. Д. Мордухай-Болтовским (кн. XI—XIII) и проф. И. Н. Веселовским (кн. XIV и XV) и сопровождается их подробными комментариями историко-математического характера **).

Расположение материала в настоящем томе, нумерация чертежей, примечаний и условные обозначения выполнены по образцу первого и второго томов, так что все указания, сделанные на этот счёт в предисловии переводчика к первому тому, остаются в силе и здесь.

*) Текст XIV и XV книг, в отличие от XI—XIII книг, печатается италически.

**) Комментарии, принадлежащие И. Н. Веселовскому, отмечены инициалами И. В.



НАЧАЛА ЕВКЛИДА

К Н И Г И

≈XI-XV≈



КНИГА ОДИННАДЦАТАЯ



ОПРЕДЕЛЕНИЯ

1. *Тело* есть то, что имеет длину, ширину и глубину (1).

2. *Граница* же тела — поверхность (1).

3. *Прямая будет перпендикулярна к плоскости*, если она со всеми прямыми, касающимися её и находящимися на этой [расположенной внизу] плоскости, образует прямые углы.

4. *Плоскость будет перпендикулярна к плоскости*, если прямые, проведённые в одной из этих плоскостей под прямыми <углами> к общему сечению плоскостей, будут под прямыми <углами> к другой плоскости (2).

5. *Наклон прямой к плоскости* будет, если из верхнего конца прямой провести к плоскости перпендикуляр и полученную точку соединить прямой с концом прямой в плоскости: угол, заключённый между проведённой <прямой> и данной <и будет наклоном> (3).

6. *Наклон плоскости к плоскости* будет острый угол, заключённый между прямыми, проведёнными в каждой плоскости под прямыми углами к общему сечению в одной и той же точке.

7. *Плоскость к плоскости и другая к другой* считаются *одинаково наклонёнными*, если упомянутые углы наклона будут равны между собой.

8. *Параллельные плоскости* суть несходящиеся.

9. *Подобными телесными фигурами* будут заключённые между равными по количеству подобными плоскостями.

10. *Равные же и подобные телесные фигуры* будут заключённые между равными по количеству и по величине подобными плоскостями (4, 5, 6).

11. *Телесный угол* <в случае> более чем двух прямых, касающихся друг друга и не находящихся в одной плоскости, есть наклон между всеми прямыми. Иначе: телесный угол есть <угол>, заключённый между более чем двумя плоскими углами, не находящимися в одной и той же плоскости и составленными вместе у одной точки.

12. *Пирамида* есть телесная фигура, заключённая между плоскостями <и> восставленная от одной плоскости к одной точке.

13. *Призма* есть телесная фигура, заключённая между плоскостями, из которых две противоположные равны, подобны и параллельны, остальные же параллелограммы (7).

14. *Сфера* будет: если при неподвижности диаметра полуокрута, вращающийся полуокрут снова вернётся в то же самое <положение>, из которого он начал двигаться, то охваченная фигура <и есть сфера>.

15. *Ось же сферы* есть неподвижная прямая, вокруг которой поворачивается полуокруг.

16. *Центр же сферы* есть то же самое, что и <центр> полуокруга.

17. *Диаметр же сферы* есть какая-нибудь прямая, проведённая через центр и ограниченная с обеих сторон поверхностью сферы (8).

18. *Конус* будет: если при неподвижности одной из сторон прямоугольного треугольника, <прилежащих> к прямому углу, вращающийся треугольник снова вернётся в то же самое <положение>, из которого он начал двигаться, то охваченная фигура <и есть конус>. И если неподвижная прямая будет равна другой, вращающейся, [той, что] при прямом угле, то конус будет *прямоугольным*, если же меньше, то *тупоугольным*, если же больше, то *остроугольным* (9).

19. *Ось же конуса* есть неподвижная прямая, вокруг которой поворачивается треугольник.

20. *Основание же* — круг, описываемый вращающейся прямой.

21. *Цилиндр* будет: если при неподвижности одной из сторон прямоугольного параллелограмма, <прилежающих> к прямому углу, вращающийся параллелограмм снова вернётся

в то же самое (положение), из которого он начал двигаться, то охваченная фигура (и будет цилиндром).

22. *Ось же цилиндра* есть неподвижная прямая, вокруг которой поворачивается параллелограмм

23. *Основания же* — круги, описываемые вращающимися двумя противоположными сторонами.

24. *Подобные конусы и цилиндры* суть те, у которых оси и диаметры оснований пропорциональны.

25. *Куб* есть телесная фигура, заключающаяся между шестью равными квадратами.

26. *Октаэдр* есть телесная фигура, заключающаяся между восемью равными и равносторонними треугольниками.

27. *Икосаэдр* есть телесная фигура, заключающаяся между двадцатью равными и равносторонними треугольниками.

28. *Додекаэдр* есть телесная фигура, заключающаяся между двенадцатью равными, равносторонними и равноугольными пятиугольниками.

Предложение 1

У прямой линии какая-нибудь часть не (может) быть в расположенной внизу плоскости, а какая-нибудь (другая) часть — в более высокой.

В самом деле, если возможно, то пусть у прямой линии ABC какая-нибудь часть AB будет в расположенной внизу плоскости, а какая-нибудь часть BC — в более высокой (черт. 1).



Черт. 1.

Вот пусть будет некоторая прямая, продолжающая AB «по прямой», в расположенной внизу плоскости. Пусть она будет BD ; значит, у двух прямых ABC , ABD будет общая (часть) — отрезок AB ; это же невозможно, поскольку если мы из центра B радиусом AB опишем круг, то диаметры $\langle ABC, ABD \rangle$ будут отсекают неравные обводы круга.

Итак, у прямой линии какая-нибудь часть не *〈может〉* быть в расположенной внизу плоскости, а другая — в более высокой, что и требовалось доказать.

Предложение 2

Если две прямые секут друг друга, то они будут в одной плоскости и весь^{)} треугольник будет в одной плоскости.*

В самом деле, пусть две прямые AB , CD секут друг друга в точке E ; я утверждаю, что AB , CD будут в одной плоскости и весь треугольник будет в одной плоскости (теог. 2).



Черт. 2.

Возьмём на EC , EB какие-нибудь точки I , H , соединим CB , IH и проведём IG , HK ; я утверждаю, во-первых, что треугольник ECB будет в одной плоскости. Действительно, если *〈какая-нибудь〉* часть треугольника ECB , например IGC , или HVK , будет в расположенной внизу [плоскости], остальное же — в другой, то и у одной из прямых

EC , EB часть будет в расположенной внизу плоскости, часть же — в другой. Если же у треугольника ECB часть $ICBH$ будет в расположенной внизу плоскости, остальное же в другой, то и у обеих прямых EC , EB какая-то часть будет в расположенной внизу плоскости, какая-то в другой; это же, как доказано, нелепо (предложение 1). Значит, треугольник ECB будет в одной плоскости. В какой же *〈плоскости〉* будет треугольник ECB , в той же самой *〈будет〉* и каждая из EC , EB ; в какой же каждая из EC , EB , в той же *〈будут〉* и AB , CD (предложение 1). Значит, прямые AB , CD будут в одной плоскости, и весь треугольник будет в одной плоскости, что и требовалось доказать (10).

^{*)} так можно перевести и «весь» и «всякий». (И. В.)

Предложение 3

Если две плоскости секут друг друга, то общее их сечение будет прямой.

В самом деле, пусть две плоскости AB , BC секут друг друга, общее же их сечение пусть будет линия DB ; и утверждаю, что линия DB есть прямая (черт. 3).

Действительно, если это не так, то соединим D с B в плоскости AB прямой DEB , в плоскости же BC прямой DIB . Вот у двух прямых DEB , DIB будут те же самые концы, и они, конечно, будут заключать пространство; это же нелено. Значит, DEB , DIB не будут прямыми. Подобным же образом докажем, что не будет и никакой другой соединяющей D с B прямой, кроме DB — общего сечения плоскостей AB , BC .

Итак, если две плоскости секут друг друга, то общее их сечение будет прямой, что и требовалось доказать (11).



Черт. 3.

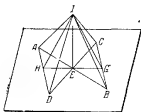
Предложение 4

Если к двум пересекающимся друг друга прямым в общем сечении под прямыми (углами) восставлена прямая, то она будет под прямыми (углами) и к (проходящей) через них плоскости.

В самом деле, пусть к двум пересекающимся друг друга прямым AB , CD в точке E будет под прямыми (углами) восставлена из E какая-нибудь прямая EI ; я утверждаю, что EI будет под прямыми (углами) и к (проходящей) через AB , CD плоскости (черт. 4).

Действительно, отложим равные друг другу (отрезки) AE , EB , CE , ED и через E проведем, как придется, какую-нибудь прямую HEG , соединим AD , CB и затем какую-нибудь (точку) I соединим (прямыми) IA , IB , ID , IC , IE , IB . И поскольку две (прямые) AE , ED равны двум CE , EB и заключают равные углы (предложение 15 книги I),

то, значит, основание AD будет равно основанию CB , и треугольник AED будет равен треугольнику CEB (предложение 4 книги I), так что и угол DAE [будет] равен углу EBC (там же). Но и угол AEN равен углу BEG . Вот будут два треугольника AHE , BEG , имеющие два угла, равные — каждый каждому — двум углам, и одну сторону, равную одной стороне, а именно <расположенные> при равных углах AE и EB ; значит, они будут иметь и остальные стороны, равные остальным сторонам (предложение 26 книги I).



Черт. 4.

Значит, HE равна EG , а AH <равна> BG . И поскольку AE равна EB , а IE общая и под прямыми <углами>, то, значит, основание IA будет равно основанию IB (предложение 4 книги I). На том же вот основании и IC будет равна ID . И поскольку AD равна CB , также и IA равна IB , то вот две IA , AD равны — каждая каждой — двум IB , BC ; и

основание ID , как доказано, равно основанию IC ; значит, и угол IAD будет равен углу IBC (предложение 8 книги I). И поскольку ещё, как доказано, AH равна BG , но также и IA равна IB , то вот две IA , AH будут равны двум IB , BG . И угол IAH , как доказано, равен углу IBG ; значит, основание IH будет равно основанию IG (предложение 4 книги I). И ещё поскольку, как доказано, HE равна EG , а IE — общая, то вот две HE , EI равны двум GE , EI ; и основание IH равно основанию IG ; значит, угол HEI будет равен углу GEI (предложение 8 книги I). Значит, каждый из углов HEI , GEI прямой (определение 10 книги I). Значит, EI будет перпендикулярна к HG — любой проведённой через E <прямой>. Подобным вот образом докажем, что IE будет образовывать прямые углы и со всеми прямыми, касающимися её и находящимися в расположенной внизу плоскости. Но прямая будет перпендикулярна к плоскости, если

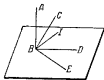
она со всеми прямыми, касающимися её и находящимися в той же самой плоскости, образует прямые углы (определение 3); значит, IE будет под прямыми $\langle$ углами $\rangle$ к расположенной внизу плоскости. Расположенной же внизу плоскостью будет $\langle$ проходящая $\rangle$ через прямые AB, CD . Значит, IE будет под прямыми $\langle$ углами $\rangle$ к $\langle$ проходящей $\rangle$ через AB, CD плоскости.

Итак, если к двум пересекающимся друг друга прямых в их общем сечении под прямыми $\langle$ углами $\rangle$ восстановлена прямая, то она будет под прямыми $\langle$ углами $\rangle$ и к $\langle$ проходящей $\rangle$ через них плоскости, что и требовалось доказать (12, 13).

Предложение 5

Если к трём касающимся друг друга прямых в общем сечении под прямыми $\langle$ углами $\rangle$ восстановлена прямая, то эти три прямые будут в одной плоскости.

В самом деле, пусть к трём прямым BC, BD, BE будет в месте касания B под прямыми $\langle$ углами $\rangle$ восстановлена какая-нибудь прямая AB ; я утверждаю, что BC, BD, BE будут в одной плоскости (черт 5).



Черт. 5.

Действительно, если не так, то пусть, если возможно, будут BD, BE в расположенной внизу плоскости, а BC в более высоко поднятой, и проведём*) плоскость через AB, BC ; вот она в расположенной внизу плоскости образует общее сечение — прямую (предложение 3). Пусть она образует $\langle$ прямую $\rangle$ BI . Значит, в одной плоскости, именно проведённой через AB, BC , будут три прямые AB, BC, BI . И поскольку AB будет перпендикулярной к каждой из BD, BE , то, значит, AB будет перпендикулярна и к $\langle$ проходящей $\rangle$ через BD, BE плоскости (предложение 4). Плоскость же, $\langle$ проходящая $\rangle$ через BD, BE , есть расположенная внизу; значит, AB будет перпендикулярна и к

*) В подлиннике «эфаллю» — выбросить. (Н. В.)

расположенной внизу плоскости. Так что AB будет образовывать прямые углы и со всеми прямыми, касающимися её и находящимися в расположенной внизу плоскости. Но её касается BI , находящаяся в расположенной внизу плоскости; значит, угол ABI будет прямым. Предполагается же, что и угол ABC прямой; значит, угол ABI равен углу ABC . И они находятся в одной плоскости; это же невозможно. Значит, прямая BC не будет находиться в более высокой плоскости; значит, три прямые BC , BD , BE будут в одной плоскости.

Итак, если к трём касающимся друг друга прямым будет в месте касания под прямыми (углами) восстановлена прямая, то три прямые будут в одной плоскости, что и требовалось доказать.

Предложение 6

Если две прямые будут к одной и той же плоскости под прямыми (углами), то эти прямые будут параллельными.



Черт. 6.

В самом деле, пусть две прямые AB , CD будут к расположенной внизу плоскости под прямыми (углами); я утверждаю, что AB будет параллельна CD (черт. 6).

Действительно, пусть они встречаются с расположенной внизу плоскостью в точках B , D , соединим прямую BD и под прямыми (углами) к BD проведем DE в расположенной внизу плоскости, отложим DE равной AB и соединим BE , AE , AD .

И поскольку AB перпендикулярна к расположенной внизу плоскости, то [значит] она будет образовывать прямые углы и со всеми прямыми, касающимися её и находящимися в расположенной внизу плоскости (определение 3). Касаются же AB каждая из (прямых) BD , BE , находящихся в расположенной внизу плоскости; значит, каждый из углов ABD , ABE будет прямым. На том же вот основании и каждый из CDB , CDE будет прямым. И поскольку AB равна DE ,

а BD общая, то вот две AB , BD равны двум ED , DB ; и они заключают прямые углы; значит, основание AD будет равно основанию BE (предложение 4 книги I). И поскольку AB равна DE , а также и AD (равна) BE , то вот две AB , BE будут равны двум ED , DA ; и у них общее основание AE ; значит, угол ABE будет равен углу EDA (предложение 8 книги I). Угол же ABE прямой; значит, и угол $EIDA$ прямой, значит, ED будет перпендикулярна к DA . Она же перпендикулярна и к каждой из BD , DC . Значит, ED к трём прямым BD , DA , DC встала под прямыми (углами), в месте их касания; значит, три прямые BD , DA , DC будут в одной плоскости (предложение 5). В какой же (плоскости) DB , DA , в той будет и AB ; ибо весь треугольник будет в одной плоскости (предложение 2); значит, прямые AB , BD , DC будут в одной плоскости. И каждый из углов ABD , BDC прямой, значит, AB будет параллельна CD (предложение 28 книги I).

Итак, если две прямые будут к одной и той же плоскости под прямыми (углами), то эти прямые будут параллельны, что и требовалось доказать.

Предложение 7

Если будут две параллельные прямые и на каждой из них взято по произвольной точке, то соединяющая эти точки прямая будет в одной и той же плоскости с параллельными.

Пусть будут две параллельные прямые AB , CD , и на каждой из них возьмём по произвольной точке E , I ; и утверждаю, что соединяющая точки E , I прямая будет в одной и той же плоскости с параллельными (черт. 7).



Черт. 7.

Действительно, пусть не так, но, если возможно, пусть она будет в более высокой (плоскости), как (например прямая) EHI , и проведём через EHI плоскость; вот она в сечении с ниже расположенной плоскостью образует прямую (предложение 3). Пусть она образует (прямую) EI ; значит, две прямые EHI , EI будут

заключать пространство; это же невозможно. Значит, соединяющая от E к I прямая не будет в более высокой плоскости; значит, в плоскости, <проходящей> через параллельные AB , CD , и будет находиться прямая, соединяющая от E к I .

Итак, если будут две параллельные прямые, и на каждой из них взято по произвольной точке, то соединяющая эти точки прямая будет в одной и той же плоскости с параллельными, что и требовалось доказать (14).

Предложение 8

Если будут две параллельные прямые, одна же будет под прямыми <углами> к какой-нибудь плоскости, то и другая к той же самой плоскости будет под прямыми <углами>.



Черт. 8.

Пусть будут две параллельные прямые AB , CD , одна же из них AB пусть будет под прямыми <углами> к расположенной внизу плоскости; я утверждаю, что и другая CD к той же самой плоскости будет под прямыми <углами> (черт. 8).

Действительно, пусть AB , CD встречаются с расположенной внизу плоскостью в точках B , D ; соединим BD ; значит, AB , CD , BD будут в одной плоскости (предложение 7). Под прямым углом к BD в расположенной внизу плоскости проведём DE , отложим DE равной AB и соединим BE , AE , AD . И поскольку AB перпендикулярна к расположенной внизу плоскости, то, значит, и ко всем прямым, касающимся её и находящимся в расположенной внизу плоскости AB будет под прямыми <углами> (определение 3); значит, каждый из углов ABD , ABE [будет] прямым. И поскольку на параллельные AB , CD упала прямая BD , то, значит, углы ABD , CDB равны будут двум прямым (предложение 29 книги 1). Угол же ABD прямой; значит, прямой и угол CDB ; значит, CD будет перпендикулярна к BD . И поскольку AB равна DE , а BD общая, то вот две AB , BD равны двум ED , DB ; и угол ABD равен углу EDB , ибо каждый из них прямой; значит, и основание AD равно

основанию BE (предложение 4 книги I). И поскольку AB равна будет DE , BE же — AD , $\langle$ и $\rangle$ вот две AB , BE равны двум ED , DA — каждая каждой; и у них общее основание AE , то, значит, и угол ABE будет равен углу EDA (предложение 8 книги I). Угол же ABE прямой; прямой, значит, и угол EDA ; значит, ED будет перпендикулярна к AD . Она же перпендикулярна и к DB ; значит, ED будет перпендикулярной и к плоскости, $\langle$ проходящей $\rangle$ через BD , DA (предложение 4); и, значит, со всеми прямыми, касающимися её и находящимися в $\langle$ проходящей $\rangle$ через BDA плоскости, ED будет образовывать прямые углы. В плоскости же, $\langle$ проходящей $\rangle$ через BDA находится DC , поскольку вот в $\langle$ проходящей $\rangle$ через BDA плоскости будут AB , BD (предложение 2), в какой же AB , BD , в той будет и DC . Значит, ED будет под прямыми $\langle$ углами $\rangle$ к DC ; так что и CD будет под прямыми $\langle$ углами $\rangle$ к DE . Но также и CD под прямыми $\langle$ углами $\rangle$ к BD . Значит, CD стоит под прямыми $\langle$ углами $\rangle$ к двум пересекающимся друг друга прямым DE , DB в сечении, в D ; так что CD будет перпендикулярна и к плоскости, $\langle$ проходящей $\rangle$ через DE , DB (предложение 4). $\langle$ Проходящая $\rangle$ же через DE , DB плоскость есть расположенная внизу; значит, CD будет под прямыми $\langle$ углами $\rangle$ к расположенной внизу плоскости.

Итак, если будут две параллельные прямые, одна же из них будет под прямыми $\langle$ углами $\rangle$ к какой-нибудь плоскости, то и другая к той же самой плоскости будет под прямыми $\langle$ углами $\rangle$, что и требовалось доказать.

Предложение 9

Параллельные одной и той же прямой и не находящиеся с ней в одной и той же плоскости будут параллельны и друг другу.

В самом деле, пусть каждая из AB , CD будет параллельна EI , не находясь с ней в одной и той же плоскости; и утверждаю, что AB будет параллельна CD (черт. 9).

Действительно, возьмём на EI произвольную точку H , и из неё в плоскости через EI , AB под прямыми $\langle$ углами $\rangle$ к EI проведём HO , в плоскости же через IE , CD , опять

под прямыми $\langle$ углами $\rangle$ к EI проведем NK . И поскольку EI перпендикулярна к каждой из HO , NK , то, значит, EI будет под прямыми $\langle$ углами $\rangle$ и к $\langle$ проходящей $\rangle$ через HO , NK



Черт. 9.

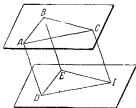
плоскости (предложение 4). И EI параллельна AB ; значит, и AB будет под прямыми $\langle$ углами $\rangle$ к плоскости через GNK (предложение 8). На том же вот основании и CD будет под прямыми $\langle$ углами $\rangle$ к плоскости через GNK ; значит, каждая из AB , CD будет под прямыми $\langle$ углами $\rangle$ к пло-

скости через GNK . Если же две прямые будут к одной и той же плоскости под прямыми $\langle$ углами $\rangle$, то эти прямые параллельны (предложение 6); значит, AB будет параллельна CD , что и требовалось доказать (15)

Предложение 10

Если две касающиеся друг друга прямые, параллельные двум касающимся друг друга прямым, находятся не в одной и той же плоскости, то они будут заключать равные углы.

В самом деле, пусть две касающиеся друг друга прямые AB , BC , параллельные двум касающимся друг друга прямым DE , EI , находятся не в одной и той же плоскости; я утверждаю, что угол ABC будет равен углу DEI (черт. 10).



Черт. 10.

Действительно, отложим BA , BC , ED , EI равными друг другу и соединим AD , CI , BE , AC , DI . И поскольку BA равна и параллельна ED , то значит, и AD будет равна и параллельна BE (предложение 33 книги I). На том же вот основании и CI будет равна и параллельна BE ; значит, каждая из

AD , CI будет равна и параллельна BE . Параллельные же одной и той же прямой и не находящиеся с ней в одной и той же плоскости будут параллельны и друг другу (предложение 9); значит, AD будет параллельна CI и равна. И соединят их AC , DI ; значит, и AC будет равна и параллельна DI (предложение 33 книги I). И поскольку две AB , BC равны двум DE , EI , и основание AC равно основанию DI , то, значит, и угол ABC будет равен углу DEI (предложение 8 книги I).

Итак, если две касающиеся друг друга прямые, параллельные двум касающимся друг друга прямым, находятся не в одной и той же плоскости, то они будут заключать равные углы, что и требовалось доказать (16).

Предложение 11

Из данной сверху точки провести на заданную плоскость отвесную прямую линию.

Пусть данная сверху точка будет A , заданная же плоскость — расположенная внизу; вот требуется из точки A провести на расположенную внизу плоскость отвесную прямую линию (черт. 11).

Проведём в расположенной внизу плоскости какую-нибудь произвольную прямую BC и проведём из точки A на BC перпендикуляр AD (предложение 12 книги I). Если теперь AD будет перпендикуляром и к расположенной внизу плоскости, то заданное уже было бы выполненным. Если же нет, то из точки D на расположенной внизу плоскости под прямыми (углами) к BC проведём DE (предложение 11 книги I) и из точки A проведём к DE перпендикуляр AI (предложение 12 книги I) и через точку I параллельно BC проведём HG (предложение 31 книги I).

И поскольку BC будет под прямыми (углами) к каждой из DA , DE , то, значит, BC будет под прямыми углами и к



Черт. 11.

плоскости. <проходящей> через EDA (предложение 4). И HO ей параллельна; если же будут две параллельные прямые, одна же из них будет под прямыми <углами> в какой-нибудь плоскости, то и другая к той же самой плоскости будет под прямыми <углами> (предложение 8); и, значит, HO будет под прямыми <углами> к <проходящей> через ED, DA плоскости. И, значит, HO будет перпендикулярна ко всем прямым, касающимся её и находящимся в <проходящей> через ED, DA плоскости (определение 3). Касается же её AI , находящаяся в плоскости через ED, DA ; значит, HO будет перпендикулярна к IA ; так что и IA будет перпендикулярна к OH . Но AI перпендикулярна и к DE ; значит, AI перпендикулярна к каждой из HO, DE . Если же к двум пересекающимся друг друга прямым в сечении под прямыми <углами> восстановлена прямая, то она будет под прямыми <углами> и к <проходящей> через них плоскости (предложение 4); значит, IA будет под прямыми <углами> к <проходящей> через ED, HO плоскости. <Проходящая> же через ED, HO плоскость есть расположенная внизу; значит, AI будет под прямыми <углами> к расположенной внизу плоскости.



Черт. 12.

Итак, из данной сверху точки A проведена на расположенную внизу плоскость отвесная прямая линия AI ; что и требовалось сделать.

Предложение 12

К заданной плоскости из данной на ней точки под прямыми <углами> восстановить прямую линию.

Пусть заданная плоскость будет расположена внизу, точка же на ней A ; требуется из точки A под прямыми <углами> к расположенной внизу плоскости восстановить прямую линию (черт. 12).

Вообразим сверху какую-нибудь точку B , и из B на расположенную внизу плоскость проведём перпендикуляр BC (предложение 11), и через точку A параллельно BC проведём AD .

Поскольку теперь будут две параллельные прямые AD, CB , одна же из них BC под прямыми <углами> к распо-

долженной внизу плоскости, то, значит, и другая AD будет к расположенной внизу плоскости под прямыми $\langle$ углами $\rangle$ (предложение 8).

Итак, к заданной плоскости из данной на ней точки A под прямыми $\langle$ углами $\rangle$ восстановлена AD , что и требовалось сделать.

Предложение 13

Из одной и той же точки к одной и той же плоскости не восстаются под прямыми $\langle$ углами $\rangle$ две прямые в одну и ту же сторону.

В самом деле, если возможно, то пусть из одной и той же точки A к расположенной внизу плоскости восстаются под прямыми $\langle$ углами $\rangle$ две прямые AB , AC в одну и ту же сторону, и проведем $\langle$ проходящую $\rangle$ через BA , AC плоскость; вот она образует сечение — проходящую через A в расположенной внизу плоскости прямую (предложение 3).



Черт. 13.

Пусть она образует $\langle$ прямую $\rangle$ DAE ; значит, прямые AB , AC , DAE будут в одной плоскости (черт. 13). И поскольку CA под прямыми $\langle$ углами $\rangle$ к расположенной внизу плоскости, то, значит, она будет образовывать прямые углы и со всеми прямыми, касающимися ее и находящимися в расположенной внизу плоскости (определение 3). Касается же ее DAE , находящаяся в расположенной внизу плоскости; значит, угол CAE будет прямым. На том же вот основании и угол BAE будет прямым; значит, угол CAE равен BAE . И они в одной плоскости; это же невозможно.

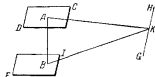
Итак, из одной и той же точки к одной и той же плоскости не восстаются под прямыми $\langle$ углами $\rangle$ две прямые в одну и ту же сторону, что и требовалось доказать (17, 18, 19, 20).

Предложение 14

К каким плоскостям перпендикулярна одна и та же прямая, те плоскости будут параллельны.

В самом деле, пусть какая-нибудь прямая AB будет под прямыми (углами) к каждой из плоскостей CD , EI ; я утверждаю, что эти плоскости будут параллельны (черт. 14).

Действительно, если это не так, то при продолжении они сойдутся. Пусть они сойдутся; вот они образуют обшее сечение — прямую (предложение 3). Пусть они образуют <прямую> HG ; возьмем на HG произвольную точку K и соединим AK , BK . И поскольку AB перпендикулярна к плоскости EI , то, значит, AB будет перпендикулярна и к прямой BK , находящейся в продолженной плоскости EI ; значит, угол ABK будет прямым (определение 3). На том же основании и <угол>



Черт. 14.

BAK прямой. Вот <у>

треугольника ABK два угла ABK , BAK равны двум прямым; что же невозможно (предложение 17 книги I). Значит, плоскости CD , EI при продолжении не сойдутся; значит, плоскости CD , EI будут параллельны (определение 8).

Итак, к каким плоскостям перпендикулярна одна и та же прямая, те плоскости параллельны, что и требовалось доказать (21, 22).

Предложение 15

Если две прямые, касающиеся друг друга, параллельны двум прямым, касающимся друг друга, не находясь в одной и той же плоскости <с ними>, то <проходящие> через них плоскости параллельны.

В самом деле, пусть две прямые AB , BC , касающиеся друг друга, будут параллельны двум прямым DE , EI , касающимся друг друга, не находясь в одной и той же плоскости; я утверждаю, что <проходящие> через AB , BC , DE , EI плоскости, будучи продолжены, не встретятся друг с другом (черт. 15).

Действительно, из точки B проведём на плоскость, <проходящую> через DE , EI перпендикуляр BH (предложение 11),

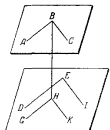
и пусть он встретится с этой плоскостью в точке H , и через H параллельно ED проведем HG , <параллельно> же EI <проведем> HK . И поскольку BH перпендикулярна к плоскости, <проходящей> через DE , EI , то, значит, она образует прямые углы и со всеми прямыми, касающимися её и находящимися в плоскости, <проходящей> через DE , EI (предложение 3). Касается же её

каждая из HG , HK , находящихся в плоскости через DE , EI ; значит, каждый из углов BHG , BHK прямой. И поскольку BA параллельна HG (предложение 9), то, значит, углы HBA , BHG равны двум прямым (предложение 29 книги I). Угол же BHG прямой; значит, и HBA прямой; значит, $HВ$ будет под прямыми <углами> к BA . На том же вот основании $HВ$ будет под прямыми <углами> и к BC . Поскольку теперь прямая $HВ$ стоит под прямыми <углами> к двум прямым BA , BC , пересекающимся друг друга, то, значит, $HВ$ будет под прямыми <углами> и к <проходящей> через BA , BC плоскости (предложение 4).

[На том же вот основании BH будет под прямыми <углами> и к плоскости, <проходящей> через HG , HK . Плоскость же через HG , HK будет <и той, что> через DE , EI ; значит, BH будет под прямыми <углами> и к плоскости через DE , EI . Доказано же, что $HВ$ под прямыми <углами> и к плоскости через AB , BC .]

К каким же плоскостям одна и та же прямая перпендикулярна, те плоскости будут параллельны (предложение 14); значит, плоскость через AB , BC будет параллельна той, что через DE , EI .

Итак, если две прямые, касающиеся друг друга, параллельны двум прямым, касающимся друг друга, не находясь в одной и той же плоскости, то <проходящие> через них плоскости параллельны, что и требовалось доказать.



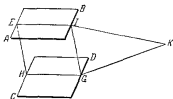
Черт. 15.

Предложение 16

Если две параллельные плоскости пересекаются какой-нибудь плоскостью, то общие их сечения будут параллельны.

Пусть две параллельные плоскости AB , CD пересекаются плоскостью $EIHG$, общие же их сечения пусть будут EI , HG ; я утверждаю, что EI будет параллельна HG (черт. 16).

Действительно, если это не так, то при продолжении EI , HG встретятся со стороны или I , G , или E , H . Про-



черт. 16.

должны их хотя бы в сторону I , G , и пусть они сперва сойдутся в K . И поскольку EIK будет в плоскости AB , то, значит, и все точки на EIK будут в плоскости AB (предложение 1). Одной же из точек на прямой EIK является K ; значит, K будет в плоскости AB . На том же вот основании K будет и в плоскости CD ; значит, плоскости AB , CD при продолжении сойдутся. Они же не сходятся вследствие того, что предположены параллельными; значит, прямые EI , HG при продолжении в сторону I , G не сойдутся. Подобно же вот докажем, что прямые EI , HG не сойдутся и при продолжении в сторону E , H . Не сходящиеся же ни с той, ни с другой стороны (прямые) будут параллельны. Значит, EI будет параллельна HG .

Итак, если две параллельные плоскости пересекаются какой-нибудь плоскостью, то общие их сечения будут параллельны, что и требовалось доказать.

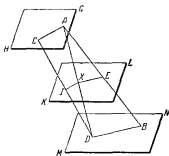
Предложение 17

Если две прямые пересекаются параллельными плоскостями, то они будут пересекаться в тех же самых отношениях.

Пусть две прямые AB , CD пересекаются параллельными плоскостями HG , KL , MN в точках A , E , B , C , I , D ; я утверждаю, что будет как прямая AE к EB , так и CI к ID (черт. 17).

Действительно, соединим AC , BD , AD , и пусть AD встречается с плоскостью KL в точке X , и соединим EX , XI . И поскольку две параллельные плоскости KL , MN , пересекаются плоскостью $EBDX$, то их общ. сечения EX , BD будут параллельны (предложение 16). На том же основании, поскольку две параллельные плоскости HG , KL пересекаются плоскостью $AXIC$, то общ. их сечения AC , XI будут параллельны. И поскольку в треугольнике ABD параллельно одной из сторон BD проведена прямая EX , то, значит, будет пропорция — как AE к EB , так и AX к XD (предложение 2 книги VI). Затем, поскольку в треугольнике ADC параллельно одной из сторон AC проведена прямая XI , то будет пропорция — как AX к XD , так и CI к ID . Доказано же, что и как AX к XD , так и AE к EB ; и значит, как AE к EB , так и CI к ID .

Итак, если две прямые пересекаются параллельными плоскостями, то они будут пересекаться в тех же самых отношениях, что и требовалось доказать.



Черт. 17

Предложение 18

Если прямая будет под прямыми (углами) к какой-нибудь плоскости, то и все (проходящие) через неё плоскости будут под прямыми (углами) к той же самой плоскости

Пусть какая-нибудь прямая AB будет под прямыми (углами) к расположенной внизу плоскости; я утверждаю, что и все (проходящие) через AB плоскости будут под прямыми (углами) к расположенной внизу плоскости (черт. 18).



Черт. 18.

Действительно, проведём *) через AB плоскость DE , и пусть общим сечением плоскости DE и расположенной внизу будет (прямая) CE ; возьмём на CE произвольную точку I , и из I под прямыми (углами) к CE в плоскости DE проведём IH . И поскольку AB перпендикулярна к расположенной внизу плоскости, то,

значит, AB будет перпендикулярна и ко всем прямым, касающимся её и находящимся в расположенной внизу плоскости (определение 3), так что она будет перпендикулярна и к CE ; значит, угол ABI будет прямым. Также и угол HIB прямой; значит, AB будет параллельна IH (предложение 28 книги I). Но AB будет под прямыми углами к расположенной внизу плоскости; значит, и IH будет под прямыми углами к расположенной внизу плоскости (предложение 8). И плоскость будет перпендикулярна к плоскости, если прямые, проведённые в одной из этих плоскостей под прямыми (углами) к общему сечению плоскостей будут под прямыми (углами) к другой плоскости (определение 4). И проведённая в одной из этих плоскостей DE под прямыми (углами) к общему сечению плоскостей CE (прямая) IH оказалась под прямыми (углами) к расположенной внизу плоскости; значит, плоскость DE будет перпендикулярна к расположенной внизу. Подобно же вот докажем, что и все проведённые через AB плоскости

*) В подлиннике $\epsilon\lambda\theta\epsilon\lambda\lambda\epsilon\theta\epsilon\omega$, буквально — выбросим.

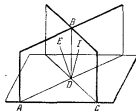
оказываются перпендикулярными к расположенной внизу плоскости

Итак, если прямая будет под прямыми углами к какой-нибудь плоскости, то и все (проходящие) через неё плоскости будут под прямыми углами к той же самой плоскости, что и требовалось доказать.

Предложение 19

Если две плоскости, пересекающиеся друг друга, будут под прямыми углами к какой-нибудь плоскости, то и общее их сечение будет под прямыми углами к той же самой плоскости.

Пусть две плоскости AB , BC будут под прямыми углами к расположенной внизу плоскости, общее же их сечение пусть будет BD ; я утверждаю, что BD будет под прямыми углами к расположенной внизу плоскости (черт. 19)



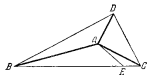
Черт. 19

Действительно, пусть не так; из точки D в плоскости AB под прямыми углами к прямой AD проведём DE , в плоскости же BC под прямыми углами к CD (проведём) DI . И поскольку плоскость AB перпендикулярна к расположенной внизу, и в плоскости AB под прямыми углами к общему их сечению AD проведена DE , то, значит, DE будет перпендикулярна к расположенной внизу плоскости (определение 4). Подобно же вот докажем, что и DI перпендикулярна к расположенной внизу плоскости. Значит, из одной и той же точки D к расположенной внизу плоскости будут восстановлены под прямыми углами две прямые в одну и ту же сторону; это же невозможно (предложение 13). Значит, к расположенной внизу плоскости из точки D не восстановится под прямыми углами никакой (прямой), кроме DB — общего сечения плоскостей AB , BC .

Итак, если две плоскости, пересекающиеся друг друга, будут под прямыми (углами) к какой-нибудь плоскости, то и вообще их сочение будет под прямыми (углами) к той же самой плоскости, что и требовалось доказать.

Предложение 20

Если телесный угол заключается между тремя плоскими углами, то два каких угодно (угла) во всех сочетаниях будут больше оставшегося.



Черт. 20.

Пусть телесный угол, что при A , заключается между тремя плоскими углами BAC , CAD , DAB ; я утверждаю, что из углов BAC , CAD , DAB два каких угодно во всех сочетаниях

будут больше оставшегося (черт. 20).

Если теперь углы BAC , CAD , DAB равны друг другу, то ясно, что два каких угодно будут больше третьего. Если же нет, то пусть большим будет угол BAC *) и построим в плоскости, (проходящей) через BAC , на прямой AB при точке α A угол BAE , равный углу DAB , отложим AE равной AD , и пусть проведенная через точку E (прямая) BEC пересекает прямые AB , AC в точках B , C , и соединим DB , DC . И поскольку DA равна AE , AB же общая, то две равны двум, и угол DAB равен углу BAE ; значит, основание DB будет равно основанию BE (предложение 4 книги I). И поскольку две BD , DC более BC , из которых DB , как доказано, равна BE , то, значит, и оставшаяся DC будет больше остатка EC . И поскольку DA равна AE , AC же общая, и основание DC больше основания EC , то, значит, угол DAC будет больше угла EAC (предложение 25 книги I). Доказано же, что и угол DAB равен углу BAE ;

*) Гейберг замечает, что нет никакой надобности предполагать, что угол BAC является наибольшим; достаточно лишь, чтобы он был больше угла DAB .

значит, углы DAB , DAC (вместе) будут больше угла BAC . Подобно же вот докажем, что и другие взятые попарно будут больше оставшегося.

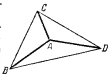
Итак, если телесный угол заключается между тремя плоскими углами, то два каких угодно (угла) во всех сочетаниях будут больше оставшегося, что и требовалось доказать.

Предложение 21

Всякий телесный угол заключается между плоскими углами, меньшими, [чем] четыре прямых (угла).

Пусть телесный угол, что при A , будет заключён между плоскими углами BAC , CAD ; DAB ; я утверждаю, что углы BAC , CAD , DAB будут меньше четырёх прямых (черт. 21).

Действительно, возьмём на каждой из (прямых) AB , AC , AD произвольные точки B , C , D и соединим BC , CD , DB . И поскольку телесный угол, что при B , заключается между тремя плоскими углами CBA , ABD , CBD , то два каких угодно будут больше оставшегося (предложение 20); значит, (углы) CBA , ABD будут больше CBD . На основании того же вот и (углы) BCA , ACD будут больше BCD , (углы) же CDA , ADB больше CDB ; значит, шесть углов CBA , ABD , BCA , ACD , CDA , ADB будут больше трёх CBD , BCD , CDB . Но три (угла) CBD , BDC , BCD равны двум прямым (предложение 32 книги I); значит, шесть (углов) CBA , ABD , BCA , ACD , CDA , ADB будут больше двух прямых. И поскольку у каждого из треугольников ABC , ACD , ADB (все) три угла равны двум прямым, то, значит, у трёх треугольников девять углов CBA , ACB , BAC , ACD , CDA , CAD , ADB , DAB , BAD равны шести прямым; из них шесть углов ABC , BCA , ACD , CDA , ADB , DAB больше двух прямых; значит, остальные три [угла] BAC , CAD , DAB , заключающие телесный угол, будут меньше четырёх прямых.



Итак, всякий телесный угол заключается между плоскими углами, меньшими, [чем] четыре прямых (угла), что и требовалось доказать (25).

Предложение 22

Если будут три плоских угла, из которых два во всех сочетаниях будут больше оставшегося, содержат же их равные прямые, то возможно из <линий>, замыкающих равные прямые, составить треугольник.



Черт. 22.

Пусть будут три плоских угла ABC , DEI , HGK , из которых два во всех сочетаниях будут больше оставшегося, <а именно> ABC , DEI <больше> HGK , <углы> же DEI , HGK <больше> ABC , и еще HGK , ABC <больше> DEI , и пусть прямые AB, BC, DE, EI, HG, GK будут равны; и соединим AC, DI, HK : я утверждаю, что возможно из <прямых>, равных AC, DI, HK , составить треугольник, то-есть что из <прямых> AC, DI, HK две какие-нибудь будут больше оставшейся (черт. 22)

Если теперь углы ABC, DEI, HGK равны друг другу, то ясно, что при <прямых> AC, DI, HK , становящихся равными (предложение 4 книги 1), возможно из равных AC, DI, HK <прямых> составить треугольник. Если же нет, то пусть они будут неравными, и построим на прямой GK при её точке G <угол> KGL , равный углу ABC ; и отложим GI равной одной из AB, BC, DE, EI, HG, GK и соединим KI, IL (черт. 23). И поскольку две AB, BC равны двум KG, GL , и угол, что при B , равен KGL , то, значит, основание AC будет равно основанию KL (предложение 4 книги 1). И поскольку <углы> ABC, HGK больше DEI ,

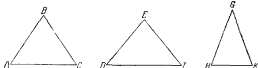
⟨угол⟩ же ABC равен KGL , то, значит, HGL будет больше DEI . И поскольку две HG , GL равны двум DE , EI , и угол HGL больше угла DEI , то, значит, основание HL будет больше основания DI (предложение 24 книги I). Но ⟨прямые⟩ HK , AL ⟨вместе⟩ больше HL (предложение 20 книги I). Значит, тем более HK , KL будут больше DI . ⟨Прямая⟩ же KL равна AC ; значит, AC , HK будут больше оставшейся DI . Подобно же вот докажем, что и AC , DI будут больше HK , и ещё DI , HK будут больше AC . Итак, возможно из трёх равных AC , DI , HK ⟨прямых⟩ составить треугольник, что и требовалось доказать (26).



Черт. 23.

Предложение 23

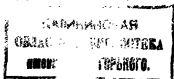
Из трёх плоских углов, из которых два во всех сочетаниях будут больше оставшегося, составить телесный угол; нужно, однако, чтобы эти три ⟨угла вместе⟩ были бы меньше четырёх прямых (предложение 21).



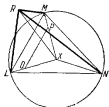
Черт. 24.

Пусть данные три плоских угла будут ABC , DEI , HOK , из которых два во всех сочетаниях пусть будут больше оставшегося, ещё же эти три ⟨угла вместе⟩ меньше четырёх прямых; вот требуется из углов, равных ABC , DEI , HOK составить телесный угол (черт. 24).

Отсечем равные ⟨прямые⟩ AB , BC , DE , EI , HO , OK , и соединим AC , DI , HK ; возможно, значит, из трёх ⟨прямых⟩, равных AC , DI , HK , составить треугольник (предложение 22). Составим ⟨треугольник⟩ LMN так, чтобы AC



равнялась бы LM , DI же MN и ещё HK (равнялась бы) NI , и опишем около треугольника LMN круг LMN (предложение 5 книги IV); возьмём его центр, и пусть он будет X , и соединим LX , MX , NX ; я утверждаю, что AB будет больше LX (черт. 25). Действительно, если не так, то AB или будет равна LX , или меньше. Пусть сперва будет равна. И поскольку AB равна LX , но AB равна BC , XL же — XM , то вот две AB , BC равны двум LX , XM — каждая каждой; и основание AC предполагается равным основанию LM ; значит, угол ABC будет равен углу LXM



Черт. 25.

(предложение 8 книги I). На том же вот основании и (углу) DEI будет равен (углу) MXN и ещё HOK — (углу) NXL ; значит, три угла ABC , DEI , HOK будут равны трём (углам) LXM , MXN , NXL . Но три угла LXM , NXM , NXL разны четырёх прямым; и значит, три (угла) ABC , DEI , HOK будут равны четырём прямым. Предполагаются же они и меньшими четырёх прямым; это же из-за. Значит, AB не будет равна LX .

Вот я утверждаю, что AB не будет и меньше LX . В самом деле, если возможно, то пусть будет; и отложим XO равной AB , XP же равной BC и соединим OP . И поскольку AB равна BC , то и XO будет равна XP ; так что и остаток LO будет равен PM . Значит, LM будет параллельна OP (предложение 2 книги I), и (треугольник) LMX будет равноугольным с OPX (предложение 29 книги I); значит, будет, что как XL к LM , так и XO к OP (предложение 4 книги VI); переставляя — как LX к XO , так и LM к OP (предложение 16 книги V). Но LX больше XO ; значит, и LM больше OP . Но LM откладывается равной AC ; значит, и AC будет больше OP . Поскольку теперь две AB , BC равны двум OX , XP , и основание AC больше основания OP , то, значит, угол ABC будет больше угла OXP (предложение 25 книги I). Подобно же вот докажем, что и (углу) DEI будет больше MXN , (углу) же HOK — (угла) NXL . Значит, три угла ABC , DEI , HOK будут больше трёх LXM ,

MXN , NXL . Но $\langle$ углы $\rangle$ ABC , DEI , HGK предполагаются меньшими четырёх прямых; значит, тем более углы LXM , MXN , NXL будут меньше четырёх прямых. Но они и равны $\langle$ четырёх прямым $\rangle$; это же нелепо. Значит, AB не будет меньше LX . Доказано же, что она и не равна; значит, AB больше LX . Вот восстановим из точки X под прямыми $\langle$ углами $\rangle$ к плоскости круга LMN $\langle$ прямую $\rangle$ XR (предложение 12), и чем квадрат на AB больше квадрата на LX , пусть тому будет равен квадрат на XR , и соединим RL , RM , RN . И поскольку RX перпендикулярна к плоскости круга LMN , то, значит, RX будет перпендикулярной и к каждой из LX , MX , NX . И поскольку LX равна XM , XR же общая и перпендикулярная, то, значит, и основание RL будет равно основанию RM (предложение 4 книги I). На том же вот основании и RN будет равна каждой из RL , RM ; значит, три RL , RM , RN будут равны друг другу. И поскольку, чем квадрат на AB больше квадрата на LX , тому предполагается равным и квадрат на XR , то, значит, квадрат на AB будет равен квадратам на LX , XR . Квадратам же на LX , XR равен квадрат на LR (предложение 47 книги I; ибо угол LXR прямой; значит, квадрат на AB равен квадрату на RL ; значит, AB равна RL . Но AB равна каждая из BC , DE , EI , HG , GK , а RL равна каждая из RM , RN ; значит, каждая из AB , BC , DE , EI , HG , GK будет равна каждой из RL , RM , RN . И поскольку две LR , RM равны двум AB , BC , и основание LM предполагается равным основанию AC , то, значит, угол LRM будет равен углу ABC (предложение 8 книги I). На том же вот основании и $\langle$ угол $\rangle$ MRN равен DEI , $\langle$ угол $\rangle$ же LRN — $\langle$ углу $\rangle$ HGK .

Итак, из трёх плоских углов LRM , MRN , LRN , которые равны трём данным углам ABC , DEI , HGK , составлен телесный угол, что при R , заключённый между углами LRM , MRN , LRN , что и требовалось сделать (27).

Л е м м а

Каким же брать квадрат на XR , чтобы он равнялся тому, на что квадрат на AB больше квадрата на LX , мы покажем так: отложим прямые AB , LX , и пусть большая

лельна AD . Докажем же, что и AB параллельна DC ; значит, AC будет параллелограммом. Подобно же вот докажем, что и каждая из DI , IN , NB , BI , AE будет параллелограммом. Соединим AG , DI . И поскольку (прямая) AB параллельна DC , BG же — CI , то вот две AB , BG , касающиеся друг друга, параллельные к двум прямым DC , CI , касающимся друг друга, не находясь в одной и той же плоскости; значит, они будут заключать равные углы (предложение 15); значит, угол ABG равен DCI . И поскольку две AB , BG равны двум DC , CI (предложение 34 книги I), и углы ABG равен углу DCI , то, значит, основание AG будет равно основанию DI , и треугольник ABG равен треугольнику DCI (предложение 4 книги I). И удвоенное от ABG есть параллелограмм BH , удвоенное же от DCI — параллелограмм CE (предложение 34 книги I); значит, параллелограмм BH будет равен параллелограмму CE . Подобно же вот докажем, что и (параллелограмм) AC будет равен NI , AE же — BI .

Итак, если тело заключается между параллельными плоскостями, то противоположные его плоскости будут равными и параллелограммами, что и требовалось доказать.

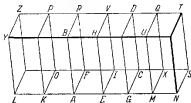
Предложение 25

Если параллелепипедальное тело сечется плоскостью, являющейся параллельной противоположным плоскостям, то будет, что как основание к основанию, так и тело к телу*

Пусть параллелепипедальное тело $ABCD$ сечется плоскостью IN , являющейся параллельной противоположным плоскостям RA , DG ; я утверждаю, что будет как основание $AEIF$ к основанию $EGCI$, так и тело $ABIV$ к телу $ENCD$ (чрез 28).

* В подлиннике старинных параллелипедон буквально «параллеле-плоскостное тело» или просто параллелепипед. Совершенно так же в I книге определяется $\chi\alpha\rho\iota\sigma\ \pi\alpha\rho\alpha\lambda\lambda\omicron\upsilon\beta\epsilon\rho\iota\sigma\ \pi\alpha\rho\alpha\lambda\lambda\omicron\upsilon\beta\epsilon\rho\iota\sigma$ «параллельно-линейная площадь», что мы переводим просто как параллелограмм.

Действительно, продолжим AG в обе стороны и отложим сколько угодно равных AE <прямых> AK , KL и сколько угодно равных EG <прямых> GM , MN , и дополним параллелограммы LO , KF , GX , MS и тела LP , KR , DM , MT . И поскольку прямые LK , KA , AE равны друг другу, будут равны и параллелограммы LO , KF , AI друг другу, и KY , KB , AN друг другу и ещё LZ , KP , AR друг другу, ибо они противоположны (предложение 24). На том же вот основании и параллелограммы EC , GX , MS будут равны



Черт. 28.

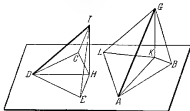
друг другу, и GH , GU , UN будут равны друг другу и ещё DG , MQ , NT ; значит, три плоскости тел LP , KR , AV равны будут трём плоскостям. Но эти три равны трём противоположным (предложение 24); значит, эти три тела LP , KR , AV будут равны друг другу. На том же вот основании и три тела ED , DM , MT будут равны друг другу; значит, сколько раз кратным основание LI будет от основания AI , столько же раз кратным будет и тело LV от тела AV . На основании того же вот, сколько раз кратным основание NI будет от основания IG , столько же раз кратным будет и тело NV от тела GV . И если основание LI равно основанию NI , то и тело LV будет равно телу NV , и если основание LI больше основания NI , то и тело NV больше тела LV , и если — меньше, то — меньше. Вот при наличии четырёх величин, а <именно> двух оснований AI , GI и двух тел AV , VG , взяты с одной стороны от основания AI и тела AV <равнократные> основание LI и тело LV , с другой же стороны — от основания GI и тела GV

⟨равнократные⟩ основание NI и тело NV , и доказано, что если основание LI больше основания IN , то и тело LV больше [тела] NV , и если — равно, то — равно, и если — меньше, то — меньше (определение 5 книги V). Значит, будет, что как основание AI к основанию IG , так и тело AI' к телу VG , что и требовалось доказать.

Предложение 26

При данной прямой и ⟨данной⟩ на ней точке составить телесный угол, равный данному телесному углу.

Пусть данная прямая будет AB , данная же на ней точка — A , данный же телесный угол — τ , что при D , за-



Черт. 29.

ключающийся между плоскими углами EDC , EDI , IDC ; вот требуется при прямой AB и на ней точке A составить телесный угол, равный телесному углу, что при D (черт. 29).

Возьмем на DI произвольную точку I и проведем из I к плоскости, ⟨проходящей⟩ через ED , DC , перпендикуляр IH (предложение 11), и пусть он встретится с плоскостью в H , соединим DH , и при прямой AB и на ней в точке A построим равный углу EDC ⟨углу⟩ BAL , ⟨углу⟩ же EDH — ⟨углу⟩ BAK (предложение 23 книги I), отложим AK равной DH , и из точки K под прямыми ⟨углами⟩ к плоскости через BAL восставим KG (предложение 12), отложим KG равной HI и соединим GA ; я утверждаю, что телесный

угол при A , заключающийся между углами BAL , BAG , GAL , будет равен телесному углу при D , заключающемуся между углами EDC , EDI , IDC .

Действительно, отсечём равные <прямые> AB , DE и соединим GB , KB , IE , HE . И поскольку IH перпендикулярна к расположенной внизу плоскости, то она, значит, со всеми прямыми, касающимися её и находящимися в расположенной внизу плоскости, будет образовывать прямые углы (определение 3). Значит, каждый из углов IHD , IHE будет прямым. На основании того же вот и каждый из углов GKA , GKB будет прямым. И поскольку две KA , AB равны двум HD , DE , каждая каждой, и заключают равные углы, то, значит, основание KB будет равно основанию HE (предложение 4 книги I). Также и KG равна HI и заключают <они> прямые углы; значит, и GB равна IE . Затем, поскольку две AK , KG равны двум DI , HI и содержат прямые углы, то, значит, основание AG будет равно основанию ID . Также и AB равна DE ; вот две GA , AB равны двум DI , DE ; и основание GB равно основанию IE ; значит, угол BAG будет равен EDI (предложение 8 книги I). На основании того же *) вот и GAL будет равен IDC [поскольку вот, если мы отсечём равные <прямые> AL , DC и соединим KL , GL , HC , IC , то, поскольку весь <угол> BAL равен всему EDC , у которых угол BAK предполагается равным EDH , значит, остающийся <угол> KAL будет равен остающемуся <углу> HDC . И поскольку две KA , AL равны двум ID , DC и заключают равные углы, то, значит, основание KL будет равно основанию HC . Также и KG равна HI ; вот две LK , KG равны двум CH , HI и заключают прямые углы; значит, основание GL будет равно основанию IC . И поскольку две GA , AL равны двум ID , DC , и основание GL равно основанию IC , то, значит, угол GAL будет равен углу IDC]. Также и угол BAL равен углу EDC .

*) Гейберг замечает, что эти слова могут служить достаточным доказательством того, что нижеследующая, поставленная в квадратных скобках часть текста, не может быть подлинной, тем более, что и слог её заметно отличается от слога Евклида.

Итак, при данной прямой AB и <данной> на ней точке A составлен <телесный угол>, равный данному телесному углу, что при D ; это и требовалось сделать *).

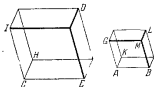
Предложение 27

На данной прямой построить параллелепипедальное тело, подобное и подобно расположенное данному параллелепипедальному телу.

Пусть данная прямая будет AB , данное же параллелепипедальное тело CD ; вот требуется на данной прямой AB построить параллелепипедальное тело, подобное и подобно расположенное данному параллелепипедальному телу CD (черт. 30).

Составим на прямой AB при точке на ней A равный телесному углу, что при C , угол, заключающийся между BAG , GAK , KAB , так, чтобы угол BAG равнялся ECI , <углу> же BAK — <углу> ECH , <углу> же KAG — <углу> HCI (предложение 26); и сделаем, чтобы как EC к CH , так и BA к AK , как же HC к CI , так и KA к AG . И, значит, по равенству (предложение 22 книги V) будет как EC к CI , так и BA к AG . И дополним параллелограмм GB и тело AL .

И поскольку будет, что как EC к CH , так и BA к AK , и при равных углах ECH , BAK стороны пропорциональны, то параллелограмм HE будет подобен параллелограмму KB . На основании того же вот и параллелограмм KQ будет подобен параллелограмму HI и еще IE подобен GB ; зна-



Черт. 30.

* Симсон замечает, что здесь Евклид пользуется предложением, что телесные углы будут равны, если равны и одинаково расположены их плоские углы. Это предложение Евклидом нигде не доказано, и он пользуется им как бы в виде скрытой аксиомы. Вообще же равенство телесных углов должно было бы быть определенным по типу определения 10 (равенство и подобие тел).

чит, три параллелограмма тела CD подобны трём параллелограммам тела AL . Но одни эти три равны и подобны трём противоположным, другие же три равны и подобны трём противоположным^{*)}; значит, всё тело CD будет подобно всему телу AL .

Итак, на данной прямой AB построено параллелепipedальное тело AL , подобное и подобно расположенное данному параллелепipedальному телу CD , что и требовалось сделать.

Предложение 28

Если параллелепipedальное тело сечётся плоскостью и диагоналям противоположных плоскостей, то это тело рассечётся плоскостью пополам.



Черт. 31.

Пусть параллелепipedальное тело AB будет рассечено плоскостью по диагоналям CI , DE противоположных плоскостей; я утверждаю, что тело AB рассечётся плоскостью $CDEI$ пополам (черт. 31).

Действительно, поскольку треугольник CHI равен треугольнику CIB , ADE же — DEG (предложение 34 книги I), и также параллелограмм CA равен EB (пб они противоположны), HE же — CG (предложение 24), то, значит, и призма, заключающаяся между двумя треугольниками CHI , ADE и тремя параллелограммами HE , AC , CE , будет равна призме, заключающейся между двумя треугольниками CIB , DEG и тремя параллелограммами CG , BE , CE ; пб они заключаются между равными по количеству и по величине плоскостями (определение 10.) Таким образом, всё тело AB рассечено плоскостью $CDEI$ пополам, что и требовалось доказать (28, 29, 30).

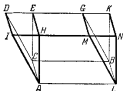
^{*)} Гейберг замечает, что это вытекает из предложения 24. При наличии определения 9 для доказательства теоремы вполне достаточно доказать подобие параллелограммов, заключающих это тело.

Предложение 29

Находящиеся на том же самом основании, под той же самой высотой параллелепипедальные тела, восстановленные <рёбра>*) которых находясь на тех же самых прямых, будут равны друг другу.

Пусть на том же самом основании AB будут параллелепипедальные тела CM , CN под той же самой высотой, восстановленные <рёбра> которых AH , AI , LM , LN , CD , CE , BG , BK пусть будут находиться на тех же самых прямых IN , DK ; я утверждаю, что тело CM будет равняться телу CN (черт. 32).

Действительно, поскольку каждая из <фигур> CG , CK — параллелограмм, то <прямая> CB будет равна каждой из DG , EK (предложение 34 книги I); так что и DG будет равна EK . Отнимем общую EG ; значит, остаток DE будет равен остатку GK . Таким образом, и треугольник DCE будет равен треугольнику GBK (предложение 1 книги I), а параллелограмм DH — параллелограмму GH (предложение 36 книги I). Из основания того же вот и треугольник AIH будет равен треугольнику MLN . Также и параллелограмм CI равен параллелограмму BM , CH же — BN (предложение 24); ибо они противоположны; значит, и призма, заключающаяся между двумя треугольниками AIH , DCE и тремя параллелограммами AD , DH , CH будет равна призме, заключающейся между двумя треугольниками MLN , GBK и тремя параллелограммами BM , GN , BN . Приложим обе тела, у которого основание — параллелограмм AB , противоположная же <грань>**) $HEGM$;



Черт. 32.

*) У Евклида стоит просто «высота» — восстановленные (подразумевается прямые). Термина «рёбра» у него нет, почему соответствующее слово и помещается в скобках. Концы этих «рёбер» попарно находятся на одних и тех же горизонтальных прямых. (И. В.)

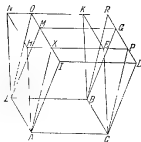
**) У Евклида просто «противоположная» — противоположная. (И. В.)

значит, всё параллелепипедальное тело CM будет равно параллелепипедальному телу CN .

Итак, находящиеся на том же самом основании параллелепипедальные тела, под той же самой высотой, восстановленные <рёбра> которых находятся на тех же самых прямых, будут равны друг другу, что и требовалось доказать (31).

Предложение 30

Находящиеся на том же самом основании параллелепипедальные тела под той же самой высотой, восстановленные <рёбра> которых не находятся на тех же самых прямых, будут равны друг другу.



Черт. 33.

Пусть на том же самом основании AB будут параллелепипедальные тела CM , CN под той же самой высотой, восстановленные <рёбра> которых AI , AN , LM , LN , CO , CE , BG , BK , не будут на тех же самых прямых; я утверждаю, что тело CM будет равно телу CN (черт. 33).

Действительно, продолжим NK , DG , и пусть они встретятся друг с другом в R , ещё продолжим IM , HE до O и P , и соединим AX , LG , CP , BR . Но тело CM , у которого основание — параллелограмм $ACBL$, противоположная же <грань> $ID\dot{M}$, будет равно телу CO , у которого основание параллелограмм $ACBL$, противоположная же <грань> $XPRO$; ибо они находятся на том же самом основании $ACBL$ и под той же самой высотой и у них восстановленные <рёбра> AI , AX , LM , LO , CD , CP , BG , BR находятся на тех же самых прямых IG , DR (предложение 29). Но тело CG , у которого основание — параллелограмм $ACBL$, противоположная же <грань> $XPRG$, будет равно телу CN , у которого основание — параллелограмм

$ACBL$, противоположная же (грань) $HEKN$; ибо они опять на том же самом основании $ACBL$, под той же самой высотой, и у них восстановленные (ребра) AH , AX , CE , CP , LN ; LO , BK , BR находятся на тех же самых прямых HP , NR . Таким образом, и тело CM будет равно телу CN .

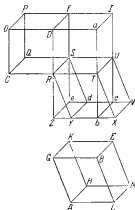
Итак, находящиеся на том же самом основании параллелепипедальные тела под той же самой высотой, восстановленные (ребра) которых не находятся на тех же самых прямых, будут равны друг другу, что и требовалось доказать.

Предложение 31

Находящиеся на равных основаниях параллелепипедальные тела под той же самой высотой будут равны друг другу.

Пусть на равных основаниях AB , CD будут параллелепипедальные тела AE , CF под той же самой высотой. Я утверждаю, что тело AE будет равно телу CF (черт. 34).

Вот пусть сначала будут восстановленные (ребра) OK , BE , AH , LM , OP , DF , CQ , RS под прямыми (углами) к основаниям AB , CD ; продолжим по прямой CR прямую RT и составим при прямой RT и точке на ней R равный угол ALB (угол) TRY (предложение 23 книги II), отложим RT равной AL , RY же (равной) LB и дополним как основание RX , так и тело UY . И поскольку две TR , RY равны двум AL , LZ и заключают равные углы, то, значит, параллелограмм

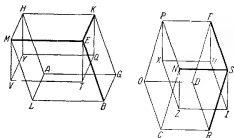


Черт. 34.

RX будет равен и подобен параллелограмму GL (предложение 14 книги VI). И опять, поскольку AL равна RT , LM же — RS и они заключают прямые углы, то, значит, параллелограмм RU будет равен и подобен параллелограмму AM . На основании того же вот и (параллелограмм) LE будет равен и подобен параллелограмму SY ; значит, три параллелограмма тела AE будут равны и подобны трём параллелограммам тела UY . Но одни из этих трёх равны и подобны трём противоположным и другие три — трём противоположным; значит, всё параллелепипедальное тело AE будет равно всему параллелепипедальному телу UY (определение 10). Продолжим DR , XY , и пусть они встретятся друг с другом в Z , через T параллельно DZ проведём aTb , продолжим OD до a и дополним тела ZU , RI . Вот тело UZ , у которого основание — параллелограмм RU , противоположная же (грань) Zc , будет равно телу UY , у которого основание — параллелограмм RU , противоположная же (грань) YV ; ибо они находятся на том же самом основании RU под той же самой высотой, и у них восстановленные (рёбра) RZ , RY , Tb , TX , Se , Sd , Uc , UV находятся на тех же самых прямых ZX , eV (предложение 29). Но тело UY равно AE ; значит, и тело UZ будет равно телу AE . И поскольку параллелограмм $RYXT$ равен параллелограмму ZT (ибо они на том же самом основании RT и в тех же самых параллелях RT , ZX) (предложение 35 книги I), но $RYXT$ равен CD , поскольку и AB , то, значит, параллелограмм ZT будет равен параллелограмму CD . (Имеется) же и другой (параллелограмм) DT ; значит, будет, что как основание CD к DT , так и ZT к DT (предложение 7 книги V). И поскольку параллелепипедальное тело CI рассечено плоскостью RF , являющейся параллельной противоположным плоскостям, то будет, что как основание CD к основанию DT , так и тело CF к телу RI (предложение 25). На основании того же вот, поскольку параллелепипедальное тело ZI рассечено плоскостью RU , являющейся параллельной противоположным плоскостям, то будет, что как основание ZT к основанию TD , так и тело ZU к телу RI . Но как основание CD к DT , так и ZT к DT ; и значит, как тело CF к телу

RI , так и тело ZU к RI . Значит, каждое из тел CF , ZU имеет к RI то же самое отношение; значит, тело CF будет равно телу ZU (предложение 9 книги VI). Но ZU , как доказано, равно AE ; значит, и AE равно будет CF .

Но вот пусть не будут восстановленные <рёбра> AH , (K , BE , LM , CN , OP , DF , RS под прямыми <углами> к основаниям AB , CD ; я опять утверждаю, что тело AE будет равно телу CF (черт. 35). Действительно, из точек K , E , H , M , P , F , N , S проведём к расположенной внизу плоскости перпендикуляры KO , ET , HV , MV , PX ,



Черт. 35.

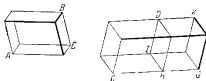
FU , NZ , SI , и пусть они встретятся с плоскостью в точках Q , T , Y , V , X , U , Z , I , и соединим QT , QY , YV , TV , XU , XZ , ZI , IU . Вот тело KV равно телу PI (ибо они находятся на равных основаниях KM , PS и под той же самой высотой и у них восстановленные <рёбра> под прямыми <углами> к основаниям). Но тело KV равно телу AE , PI же — CF , ибо они на одном и том же основании и под той же самой высотой, и у них восстановленные <рёбра> не находятся на тех же самых прямых (предложение 30). И значит, тело AE будет равно телу CF .

Итак, находящиеся на равных основаниях параллелепипедальные тела под той же самой высотой будут равны друг другу, что и требовалось доказать.

Предложение 32

Находящиеся под той же самой высотой параллелепипедальные тела будут <относиться> друг к другу как основания.

Пусть будут под той же самой высотой параллелепипедальные тела AB , CD ; я утверждаю, что параллелепипедальные тела AB , CD будут друг к другу как основания, то-есть, что будет — как основание AE к основанию CI , так и тело AB к телу CD (черт. 36).



Черт. 31.

Действительно, к IN приложим <параллелограмм> IG , равный AE (предложение 45 книги I) и на основании IG с высотой той же самой, что и у CD , дополним параллелепипедальное тело HK . Вот тело AB равно телу HK , ибо они находятся на равных основаниях AE , IG и под той же самой высотой (предложение 31). И поскольку параллелепипедальное тело CK рассечено плоскостью DH являющейся параллельной противоположным плоскостям, то, значит, будет, что как основание CI к основанию IG , так и тело CD к телу DG (предложение 23). Основание же IG равно основанию AE , а тело HK — телу AB ; значит, будет, что и как основание AE к основанию CI , так и тело AB к телу CD .

Итак, находящиеся под той же самой высотой параллелепипедальные тела будут <относиться> друг к другу, как основания, что требовалось доказать (32).

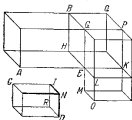
Предложение 33

Подобные параллелепипедальные тела будут друг к другу в тройном отношении ^{*)} соответственных сторон.

Пусть будут подобные параллелепипедальные тела AB , CD ; и пусть <сторона> AE соответствует CI ; и утверждаю, что тело AB имеет к телу CD тройное отношение AE к CI (черт. 37).

Действительно, продолжим по прямым AE , HE , GE <стороны> EK , EL , EA , продолжим LA равной CI , EI же — IN и ещё EM — <равной> IR , и дополним параллелограмм KL и тело KO .

И поскольку две KE , EL равны двум CI , IN , а также и угол KEL равен углу CIN , поскольку же и <угол> AEN равен CIN вследствие подобия тел AB , CD , то, значит, параллелограмм KL будет равен [и подобен] параллелограмму CN . На основании того же вот и параллелограмм KM будет равен и подобен [параллелограмму] CR и ещё EO <равен и подобен> DI ; значит, три параллелограмма тела KO будут равны и подобны трём параллелограммам тела CD . Но эти три равны и подобны трём противоположным, другие же три равны и подобны трём противоположным (предложение 24); значит, всё тело KO будет равно и подобно телу CD . Дополним параллелограмм HK и на основаниях — параллелограммах HK , KL , с высотой же той же самой, что у AB , дополним тела EQ , LP . И поскольку вследствие подобия тел AB , CD будет, что как AE к CI , так и EH к IN , и EG к IR , а CI равно EK , IN же EL , IR же EM , то значит, будет, как AE к EK , так и HE к EL и GE к EM . Но как AE к EK , так и



Черт. 37

^{*)} в трикратном и т. д. — в тройном отношении; как всегда у Евклида, надо понимать «в повторённом три раза множителем отношении».

[параллелограмм] $АН$ к параллелограмму $НК$, как же $НЕ$ к EL , так и (параллелограмм) $НК$ к KL , как же GE к EM , так и (параллелограмм) $РЕ$ к KM (предложение 1 книги VI); и значит, как параллелограмм $АН$ к $НК$, так и $НК$ к KL и $РЕ$ к KM . Но как $АН$ к $НК$, так и тело AB к телу EQ , как же $НК$ к KL , так и тело QE к телу PL , как же $РЕ$ к KM , так и тело PL к телу $КО$ (предложение 32); и значит, как тело AB к EQ , так и EQ к PL и PL к $КО$. Если же четыре величины будут в непрерывной пропорции, то первая к четвертой имеет отношение тройное, чем ко второй (определение 10 книги V); значит, тело AB к $КО$ имеет тройное отношение AB к EQ . Но как AB к EQ , так и параллелограмм $АН$ к $НК$ и прямая AE к EK ; так что и тело AB имеет к $КО$ тройное отношение AE к EK . Тело же $КО$ равно телу CD , прямая же EK (равна) CI ; и значит, тело AB имеет к телу CD тройное отношение соответственной своей стороны AE к соответственной стороне CI .

Значит, подобные параллелепипедальные тела будут в тройном отношении соответственных сторон, что и требовалось доказать.

Следствие*)

Из этого вот ясно, что если четыре прямые пропорциональны, то будет, что как первая к четвертой, так и параллелепипедальное тело на первой и к подобному и подобно построенному на второй, поскольку и первая будет иметь к четвертой тройное отношение, чем ко второй.

Предложение 34

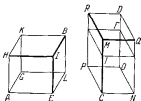
У равных параллелепипедальных тел основания обратно пропорциональны высотам; и у каких параллелепипедальных тел основания обратно пропорциональны высотам, те будут равны

*) Гейберг замечает, что можно с полным правом сомневаться в принадлежности этого следствия Евклиду.

Пусть будут равные параллелепипедальные тела AB , CD ; я утверждаю, что у параллелепипедальных тел AB , CD основания обратно пропорциональны*) высотам, и будет, что как основание EG к основанию NP , так и высота тела CD к высоте тела AB .

Действительно, пусть сначала восстановленные (рёбра) AH , EI , LB , GK , CM , NQ , OD , PR будут под прямыми (углами) к их основаниям; я утверждаю, что будет как основание EG к основанию NP , так и CM к AH (черт. 38).

Если теперь основание EG равно основанию NP , а также и тело AB равно телу CD , то и CM будет равна AH . Действительно, находящиеся под той же самой высотой параллелепипедальные тела будут (относиться) друг к другу как основания (предложение 32) [ибо если бы при равных основаниях EG ,



Черт. 38.

NP высоты AH , CM не были бы равны, то значит, и тело AB не было бы равным CD . Оно же предполагается равным; значит, не будет высота CM неравной высоте AH ; значит, она будет равна]. И будет, что как основание EG к NP , так и CM к AH , и ясно, что у параллелепипедальных тел AB , CD основания обратно пропорциональны высотам.

Пусть вот не будет основание EG равно основанию NP , но пусть EG будет больше. Тело же AB равно телу CD ; значит, и (высота) CM будет больше AH [ибо если не так, то опять, значит, и тела AB , CD не будут равными; они же предполагаются равными]. Отложим теперь CT равной AH , и на основании NP с высотой CT дополним параллелепипедальное тело FC . И поскольку тело AB равно телу CD , кроме того же (есть тело) CF , равные же к одному и тому же имеют то же самое отношение (предложение 7 книги V), то, значит, будет, что как тело

*) *ἀντιστρόφως* — то же самое выражение, что и в определениях книги VI, но только уже с вполне ясно выраженным характером обратной пропорциональности.

AB к телу CF , так и тело CD к телу CF . Но как тело AB к телу CF , так и основание EG к основанию NP (предложение 32), ибо тела AB , CF равновысотны; как же тело CD к телу CF , так и основание MP к основанию TP (предложение 25) и <линия> CM к CT (предложение 1 книги VI); и значит, как основание EG к основанию NP , так и MC к CT . Но CT равна AN ; значит, и как основание EG к основанию NP , так и MC к AN . Значит, у параллелепипедальных тел AB , CD основания обратно пропорциональны высотам.

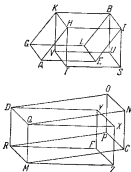
Затем пусть вот у параллелепипедальных тел AB , CD основания будут обратно пропорциональны высотам, и пусть будет, что как основание EG к основанию NP , так и высота тела CD к высоте тела AB ; я утверждаю, что тело AB будет равно телу CD .

[Действительно], пусть опять восстановленные <рёбра> будут под прямыми <углами> к основаниям. И если основание EG равно основанию NP , и будет, что как основание EG к основанию NP , так и высота тела CD к высоте тела AB , то, значит, и высота тела CD будет равна высоте тела AB . Находящиеся же на равных основаниях параллелепипедальные тела под той же самой высотой будут равны друг другу (предложение 31); значит, тело AB равно будет телу CD .

Вот пусть основание EG не будет равно [основанию] NP , но пусть EG будет больше; значит, и высота тела CD будет больше высоты тела AB , то-есть CM <больше> AN . Опять отложим CT равной AN и подобным же образом дополним тело CF . Поскольку будет, что как основание EG к основанию NP , так и MC к AN , AN же равна CT , то, значит, будет, что как основание EG к основанию NP , так и CM к CT . Но как [основание] EG к основанию NP , так и тело AB к телу CF (предложение 32), ибо тела AB , CF равновысотны; как же CM к CT , так и основание MP к основанию PT (предложение 1 книги VI) и тело CD к телу CF (предложение 25). И значит, как тело AB к телу CF , так и тело CD к телу CF ; значит, каждое из AB , CD имеет к CF то же самое отношение. Значит, тело AB будет равно телу CD (предложение 9 книги V), [что и требовалось доказать].

Пусть вот не будут восстановленные <рёбра> IE , BL , HA , GK , QN , DO , MC , RP под прямыми <углами> к их основаниям; проведём из точек I , H , B , K , Q , M , D , R перпендикуляры на плоскости, <проходящие> через EG , NP , и пусть они встретятся с плоскостями в точках S , T , U , V , X , Y , Z , F , и дополним тела IV , QZ ; я утверждаю, что и так при равенстве тел AB , CD основания обратно пропорциональны высотам, и будет, что как основание EG к основанию NP , так и высота тела CD к высоте тела AB (черт. 39).

Поскольку тело AB равно телу CD , но AB равно BT (предложения 29, 30) (ибо они на том же самом основании IK и под той же высотой [и у них восстановленные <рёбра> не находятся на тех же самых прямых]); тело же CD равно DZ (ибо опять они на том же самом основании RQ и под той же самой высотой [и у них восстановленные <рёбра> не находятся на тех же самых прямых]), то, значит, и тело BT равно будет телу DZ ; [у равных же парал-



Черт. 39.

лелепидальных тел, у которых высоты*) под прямыми <углами> к их основаниям, основания обратно пропорциональны высотам]. Значит, будет, что как основание IK к основанию QR , так и высота тела DZ к высоте тела BT . Но основание IK равно основанию EG , основание же QR — основанию NP . Значит, будет, что как основание EG к основанию NP , так и высота тела DZ к высоте тела BT . Но у тел DZ , BT и <также> DC , BA будут те же самые высоты; значит, будет, что как основание EG к основанию NP ,

*) В подлиннике та же — высоты; читай: восстановленные <рёбра>. Вся поставленная в скобках фраза внушает иллюзию в своей полноте.

так и высота тела DC к высоте AB . Значит, у параллелепипедальных тел AB , CD основания обратно пропорциональны высотам.

Опять вот пусть у параллелепипедальных тел AB , CD основания будут обратно пропорциональны высотам, и пусть будет как основание EG к основанию NP , так и высота тела CD к высоте тела AB ; я утверждаю, что тело AB будет равно телу CD .

Действительно, при тех же самых построениях, поскольку будет, что как основание EG к основанию NP , так и высота тела CD к высоте тела AB , основание же EG равно основанию IK , NP же — QR , то, значит, будет, что как основание IK к основанию QR , так и высота тела CD к высоте тела AB . У тел же AB , CD и соответственно BT , DZ те же самые высоты; значит, будет, что как основание IK к основанию QR , так и высота тела DZ к высоте тела BT . Значит, у параллелепипедальных тел BT , DZ основания обратно пропорциональны высотам; [у каких же параллелепипедальных тел высоты^{*)} под прямыми (углами) к их основаниям, основания же обратно пропорциональны высотам, те (тела) будут равны]; значит, тело BT будет равно телу DZ . Но BT равно BA (предложения 29, 30), ибо они [находятся] на том же самом основании IK и под той же высотой [и у них восстановленные (рёбра) не находятся на тех же самых прямых]. Тело же DZ равно телу DC [ибо они опять находятся на том же самом основании QR и под той же высотой и не на тех же самых прямых]. И значит, тело AB будет равно телу CD , что и требовалось доказать (33, 34, 35).

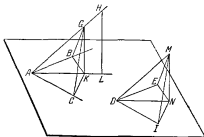
Предложение 35

Если будут два равных плоских угла, через их вершины будут восстановлены поднимающиеся вверх прямые, образующие равные — каждый каждому — углы с первоначальными прямыми, на поднимающихся вверх (прямых)

^{*)} Опять читай — «восстановленные (рёбра)» (см. предыдущую сноску).

взяты произвольные точки, из них проведены перпендикуляры к плоскостям, на которых находятся первоначальные углы, и из полученных на плоскостях точек к (вершинам) первоначальных углов будут проведены соединяющие прямые, то они будут заключать равные углы с поднимающимися вверх (прямыми).

Пусть будут два равных прямолинейных угла BAC , EDI , из точек A , D будут восставлены поднимающиеся вверх прямые AH , DM , образующие равные — каждый каждому —



Черт. 40.

углы с первоначальными прямыми, именно MDE , (равный) HAB , MDI же — HAC ; взяты на AH , DM произвольные точки H , M , из точек H , M проведены перпендикуляры HL , MN к плоскостям через BAC , EDI и пусть они встретятся с плоскостями в N , L ; соединим LA , ND ; я утверждаю, что угол HAK будет равен углу MDN (черт. 40).

Отложим AG равной DM и через точку G параллельно HL проведем GK . Но HL перпендикулярна к плоскости, (проходящей) через BAC ; значит, и GK будет перпендикулярна к плоскости через BAC (предложение 8). Проведем из точек K , N к прямым AB , AC , DI , DE перпендикуляры KC , NI , KB , NE и соединим GC , GB , MI , IE . Поскольку квадрат на GA равен квадратам на GK , KA , квадрату же на KA равны квадраты на KC , CA (предложение 47 книги I),

то, значит, и квадрат на GA будет равен квадратам на OK , KC , CA . Квадратам же на OK , KC равен квадрат на GC ; значит, квадрат на GA будет равен квадратам на GC , CA . Значит, угол GCA прямой (предложение 48 книги I). На основании того же вот и угол DIM будет прямым. Значит, угол ACD будет равен углу DIM . Также и угол GAC равен углу MDI . Вот будут два треугольника MDI , GAC , имеющие два угла, равные двум углам — каждый каждому, и одну сторону, равную одной стороне, т. е. GA , стягивающую один из равных углов, <равную> MD ; значит, и остальные стороны они будут иметь равными — каждая каждой — остальным сторонам (предложение 26 книги I). Значит, AC будет равна DI .

Подобным же вот образом докажем, что и AB равна DE . [*Доказывается*] так: соединим GB , ME . И поскольку квадрат на AG равен квадратам на AK , KG , квадрату же на AK равны квадраты на AB , BK , то, значит, квадраты на AB , BK , KG равны будут квадрату на AG . Но квадратам на BK , KG равен квадрат на BG ; угол же GKB прямой вследствие того, что и GK — перпендикуляр к расположенной внизу плоскости; значит, квадрат на AG будет равен квадратам на AB , BG ; значит, угол ABG будет прямым. На основании вот того же и угол DEM будет прямым. Также и угол BAG равен углу EDM (ибо так предпологается), и AG равна DM ; значит, и AB равна DE]*). Поскольку теперь AC равна DI , AB же — DE , то вот два CA , AB равны двум ID , DE . Но и угол CAB равен углу IDE ; значит, и основание BC будет равно основанию EI , и треугольник треугольнику и остальные углы остальным углам (предложение 4 книги I); значит, угол ACB равен DIE . Также и прямой угол ACK равен прямому углу DIN ; значит, и остающийся угол BCK будет равен остающемуся углу EIN . На основании того же вот и угол CBK будет

*) Все, стоящее в квадратных скобках, бесполезно и для Евклида не характерно, почему Симсон, Август и Гейберг в высшей степени правильно приписали это интерпретатору, с чем нельзя не согласиться. В латинском переводе Кампана (XII век) это место отсутствует (Гейберг).

равен углу IEN . Вот будут два треугольника BCK , EIN , имеющие два угла, равные двум углам — каждый каждому, и одну сторону, равную одной стороне, (именно лежащую) при равных углах BC , (равную) EI ; значит, и остальные стороны они будут иметь равными остальным сторонам (предложение 26 книги I). Значит, CK будет равна IN . Также AC равна DI ; вот две AC , CK равны двум DI , IN ; и они заключают прямые углы. Значит, и основание AK будет равно основанию DN . И поскольку AG равна DM , то и квадрат на AG равен квадрату на DM . Но квадрату на AG равны квадраты на AK , KG (ибо угол AKG прямой); квадрату же на DM равны квадраты на DN , NM (ибо угол DNM прямой) (предложение 47 книги I); значит, квадраты на AK , KG равны квадратам на DN , NM , из которых квадрат на AK равен квадрату на DN ; значит, оставшийся квадрат на KG будет равен квадрату на NM ; значит, KG равен MN . И поскольку две GA , AK равны двум MD , DN — каждая каждой, и основание AK , как доказано, равно основанию MN , то, значит, угол GAK будет равен углу MDN (предложение 8 книги I).

Итак, если будут два равных плоских угла и так далее, что в предложении [что и требовалось доказать] *).

Следствие

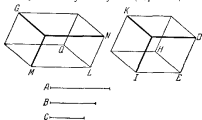
Из этого вот ясно, что если будут два равных плоских угла и к ним будут восставлены поднимающиеся вверх равные прямые, заключающие равные — каждый каждому — углы с первоначальными прямыми, то проведенные из них к плоскостям, в которых находятся первоначальные углы, перпендикуляры будут равны друг другу, что и требовалось доказать.

*) Интересно отметить, что Евклид здесь, как и всегда и в других случаях (например, при доказательстве предложений 8 и 9 книги II), не пользуется теоремой о равенстве прямоугольных треугольников по гипотенузе и катету, а применяет теорему Пифагора. Впрос, почему он так делает, представляет значительный интерес.

Предложение 36

Если будут три пропорциональные прямые, то <составленное> из трёх параллелепипедальное тело будет равно равностороннему параллелепипедальному телу на средней, равноугольному с вышеупомянутым.

Пусть будут три пропорциональные прямые A, B, C — как A к B , так и B к C ; я утверждаю, что <составленное> из A, B, C тело будет равно равностороннему телу на B , равноугольному с вышеупомянутым (черт 41).



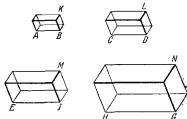
Черт. 41.

Построим телесный угол, что при E , заключающийся между углами DEH, HEI, IED , отложим DE, HE, EI равными каждой B и доложим параллелепипедальное тело EK ; (положим затем) LM равной A и составим при прямой LM и на её точке L телесный угол, равный телесному углу при E , заключённый между NLQ, QLM, MLN (предложение 23, также предложение 21), и отложим LQ равной B , LV же равной C . И поскольку будет, что как A к B , так и B к C , и A равна LM , B же — каждой из LQ, ED , а C <равна> LN , то, значит, будет, что как LM к EI , так и DE к LN . И при равных углах NLM, DEI стороны обратно пропорциональны; значит, параллелограмм MN будет равен параллелограмму DI (предложение 14 книги VI). И поскольку будут два равных плоских прямоугольных угла DEI, NLM , и к ним восстановлены поднимающиеся вверх прямые LQ, EH , равные друг другу и заключающие равные — каждый каждому — углы с первоначальными прямыми, то,

значит, проведённые из точек H , Q к плоскостям NLM , DEI перпендикуляры будут равны друг другу (предложение 35, следствие); так что тела LG , EK будут под той же самой высотой. Находящиеся же на равных основаниях параллелепипедальные тела под той же самой высотой будут равны друг другу (предложение 31); значит, тело GL будет равно телу EK . И LG есть тело из трёх <прямых> A , B , C , а EK тело на B ; значит, <составленное> из A , B , C параллелепипедальное тело будет равно равносильному телу на B , равноугольному с вышеупомянутым, что и требовалось доказать.

Предложение 37

Если будут четыре пропорциональные прямые, то и подобныя и подобно построенные на них параллелепипедальные тела будут пропорциональны; и если подобныя и



Черт. 42.

подобно построенные на них параллелепипедальные тела пропорциональны, то и самые эти прямые будут пропорциональны.

Пусть будут четыре пропорциональные прямые AB , CD , EI , HG — как AB к CD , так и EI к HG , и построим на AB , CD , EI , HG подобныя и подобно расположенные параллелепипедальные тела KA , LC , ME , NH ; я утверждаю, что будет — как KA к LC , так и ME к NH (черт. 42).

Действительно, поскольку параллелепипедальное тело KA подобно LC , то, значит, KA имеет к LC тройное отношение

AB к CD (предложение 33). На основании того же вот и ME имеет к NH тройное отношение EI к HG . И как AB к CD , так и EI к HG . И значит, как <тело> AK к LC , так и ME к NH .

Но вот пусть будет, что как тело AK к телу LC , так и тело ME к NH ; я утверждаю, что будет как прямая AB к CD , так и EI к HG .

Действительно, поскольку опять <тело> KA имеет к LC тройное отношение AB к CD (предложение 33), также и ME имеет к NH тройное отношение EI к HG , и как KA к LC , так и ME к NH , то, значит, и как AB к CD , так и EI к HG .

Итак, если будут четыре пропорциональные прямые и так далее, что в предложении, что и требовалось доказать (36).

Предложение 38

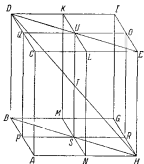
Если у противоположных плоскостей куба стороны будут разделены пополам, через сечения же проведены плоскости, то линия общего сечения плоскостей и диаметр куба разделят друг друга пополам.

Пусть у противоположных плоскостей CI , AG куба AI стороны будут разделены пополам в точках K , L , M , N , Q , P , O , R , через сечения же проведены плоскости KN , QR , общее же сечение этих плоскостей будет US , диагональ*) же куба DN . Я утверждаю, что UT будет равна TS , DT же — TH (черт. 43).

Действительно, соединим DU , UE , BS , SH . И поскольку DQ параллельна OE , то накрест лежащие углы DQU , UOG равны друг другу (предложение 39 книги I). И поскольку DQ равна OE , CU же — UO , и они заключают равные углы, то, значит, основание DU равно UE и треугольник DQU равен треугольнику OUE , и остальные углы равны остальным углам (предложение 4 книги I); значит, угол QUD будет равен углу OUE . Вот на основании этого DUE будет прямой (предложение 14 книги I). На том же вот основании и BSH будет прямой и BS равна SH . И по-

*) В подлиннике *διὰ τομήν*.

скольку CA равна и параллельна DB , но CA также равна и параллельна EH , то, значит, DB будет равна и параллельна EH (предложение 9). И их соединяют прямые DE , BH ; значит, DE будет параллельна BH (предложение 33 книги I). Значит, угол EDT будет равен углу BHT (ибо они накрест лежащие) (предложение 29 книги I), угол же DTU — углу HTS (предложение 15 книги I). Вот будут два треугольника DTU , HTS , имеющие два угла, равные двум углам, и одну сторону, стягивающую один из равных углов, равную одной стороне. $\langle$ именно $\rangle$ DU $\langle$ равную $\rangle$ HS (ибо они суть половины DE , BH); значит, и остальные стороны они будут иметь равными остальным сторонам (предложение 26 книги I). Значит, DT будет равна TH , UT же — TS .



Черт. 43.

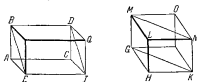
Итак, если у противоположных плоскостей куба стороны будут разделены пополам, через сечения же проведены плоскости, то общее сечение плоскостей и диаметр куба разделят друг друга пополам, что и требовалось доказать (37, 38, 39).

Предложение 39

Если будут две равновысотные призмы, и одна имеет основанием параллелограмм, другая же — треугольник, параллелограмм же будет вдвое больше треугольника, то эти призмы будут равными.

Пусть будут две равновысотные призмы $ABCDEI$, $HGKLMN$, и пусть одна имеет основанием параллелограмм AI , другая же треугольник HGK , и пусть параллелограмм AI будет вдвое больше треугольника HGK ; я утверждаю, что призма $ABCDEI$ будет равна призме $HGKLMN$ (черт. 44).

Действительно, дополним тела AQ , HO . Поскольку параллелограмм AI вдвое больше треугольника HGK , также и параллелограмм GK вдвое больше треугольника HGK , (предложение 34 книги I), то, значит, параллелограмм AI будет равен параллелограмму GK . Находящиеся же на равных основаниях параллелепипедальные тела под той же са-



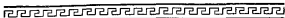
Черт. 44.

мой высотой будут равны друг другу (предложение 31); значит, тело AQ будет равно телу HO . И половиной тела AQ будет призма $ABCDEI$, половиной же тела HO — призма $HGKLMN$ (предложение 28); значит, призма $ABCDEI$ будет равна призме $HGKLMN$.

Итак, если будут две равновысотные призмы и одна имеет основанием параллелограмм, другая же — треугольник, параллелограмм же будет вдвое больше треугольника, то эти призмы будут равны, что и требовалось доказать.



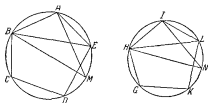
КНИГА ДВЕНАДЦАТАЯ



Предложение 1

В кругах подобные многоугольники будут <относиться> друг к другу, как квадраты на диаметрах.

Пусть будут круги ABC , IHG , и в них подобные многоугольники $ABCDE$, $IHGKL$, диаметры же кругов пусть бу-



Черт. 1.

дут BM , HN ; я утверждаю, что будет как квадрат на BM к квадрату на HN , так и многоугольник $ABCDE$ к многоугольнику $IHGKL$ (черт. 1).

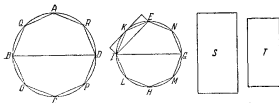
Действительно, соединим BE , AM , HL , IN . И поскольку многоугольник $ABCDE$ подобен многоугольнику $IHGKL$, то и угол BAE равен углу HIL , и будет, что как BA к AE , так и HI к IL (определение 1 книги VI). Вот будут два треугольника BAE , HIL , имеющие один угол равным одному углу, <именно> BAE <равным> HIL , при равных же углах стороны пропорциональны; значит, треугольник ABE будет равноуголен с треугольником IHL (предложение 6 книги VI). Значит, угол AEB будет равен ILH . Но <угол>

$\angle AEB$ равен $\angle AMB$ (ибо они стоят на точ же самом обводе) (предложение 27 книги III), $\angle ILH$ — $\angle INH$; и, значит, $\angle AMB$ равен $\angle INH$. Также и прямой $\angle$ BIM равен прямому HIN (предложение 31 книги III); значит, и оставшийся $\angle$ будет равен оставшемуся. Значит, треугольник ABM будет равноуголен треугольнику HNH . Значит, будет пропорция как BM к HN , так и BA к HI (предложение 4 книги VI). Но отношение BM к HN , $\langle$ взятое $\rangle$ вдвойне, будет $\langle$ отношением $\rangle$ квадрата на BM к квадрату на HN , $\langle$ отношение $\rangle$ же BA к HI , $\langle$ взятое $\rangle$ вдвойне, будет $\langle$ отношением $\rangle$ многоугольника $ABCDE$ к многоугольнику $IHGKL$ (предложение 20 книги VI); и значит, как квадрат на BM к квадрату на HN , так и многоугольник $ABCDE$ к многоугольнику $IHGKL$.

Итак, в кругах подобные многоугольники будут друг к другу, как квадраты на диаметрах, что и требовалось доказать.

Предложение 2

Круги будут друг к другу как квадраты на диаметрах.



Черт. 2.

Пусть будут круги $ABCD$, $EIHG$, диаметры же их [пусть будут] BD , IG ; я утверждаю, что будет как круг $ABCD$ к кругу $EIHG$, так и квадрат на BD к квадрату на IG (черт. 2).

Действительно, если не будет, что как круг $ABCD$ к $EIHG$, так и квадрат на BD к квадрату на IG , то будет, что как квадрат на BD к квадрату на IG , так и круг $ABCD$ или к меньшей круга $EIHG$ площади, или к большей. Пусть сперва будет к меньшей T^*). И в круг $EIHG$ впишем квадрат EIH' ; вот вписанный квадрат будет больше, чем половина круга $EIHG$, поскольку ведь если мы проведем через точки E, I, H, G касательные к кругу [прямые], то половиной описанного около круга квадрата будет квадрат $EIHG^{**}$), круг же будет меньше описываемого квадрата, так что вписанный квадрат $EIHG$ будет больше половины круга $EIHG$. Разделим обводы EI, IH, HG, GE пополам в точках K, L, M, N и соединим $EK, KI, IL, LH, HM, MG, GN, NE$; значит, в каждый из треугольников EKI, ILH, HMG, GNE будет больше, чем половина <описанного> около него сегмента круга, поскольку, ведь если мы через точки K, L, M, N проведем касательные к кругу в доопишем параллелограмм на прямых EI, IH, HG, GE , то каждый из треугольников EKI, ILH, HMG, GNE будет половиной <соответствующего> ему параллелограмма, но сегмент около него будет меньше параллелограмма, так что каждый из треугольников EKI, ILH, HMG, GNE будет больше, чем половина <описанного> около него сегмента круга. Вот, разделяя получающиеся <в этом процессе>***) дуги пополам, соединяя прямые и делая так всё время, получим в остатке некоторые отрезки круга, которые <взяты вместе> будут меньше того избытка, на который круг $EIHG$ превосходит площадь T . Действительно, было доказано в первой теореме десятой книги, что если, положивши две неравные величины, мы будем от большей отнимать больше чем половину и от остатка больше чем половину, и делать это постоянно, то останется некоторая величина, которая будет меньше, чем данная меньшая величина. Пусть теперь так и останется, и пусть <построенные> на $EK, KI, IL, LH, HM, MG, GN, NE$ сегменты круга $EIHG$, <вместе взятые>,

* У Гейберга S — очевидная ошибка.

** Это легко получается по теореме Пифагора.

***) *ἀπολείποντες* — остающиеся после (подразделения).

будут меньше того избытка, на который круг $EIHG$ превосходит площадь T . Значит, остаток — многоугольник $EKILHMGN$ — будет больше площади T . Впишем и в круг $ABCD$ подобный многоугольнику $EKILHMGN$ многоугольник $AQBOCPDR$; значит, будет, что как квадрат на BD к квадрату на IG , так и многоугольник $AQBOCPDR$ к многоугольнику $EKILHMGN$ (предложение 1). Но и как квадрат на BD к квадрату на IG , так круг $ABCD$ к площади T ; и значит, как круг $ABCD$ к площади T , так и многоугольник $AQBOCPDR$ к многоугольнику $EKILHMGN$; значит, переставляя (предложение 16 книги V), как круг $ABCD$ к многоугольнику в нём, так и площадь T к многоугольнику $EKILHMGN$. Круг же $ABCD$ больше многоугольника в нём; значит, и площадь T больше многоугольника $EKILHMGN$. Но <она также> и меньше; это же невозможно. Значит, не будет, что как квадрат на BD к квадрату на IG , так и круг $ABCD$ к некоторой меньшей круга $EIHG$ площади. Подобно же вот докажем, что не <будет и> как квадрат на IG к квадрату на BD , так и круг $EIHG$ в некоторой меньшей круга $ABCD$ площади.

Вот я утверждаю, что не будет и как квадрат на BD к квадрату на IG , так и круг $ABCD$ к некоторой большей круга $EIHG$ площади.

Действительно, если возможно, то пусть будет к большей <площади> S . Обращая, значит (предложение 7 книги V, следствие) [будет], что как квадрат на IG к квадрату на DB , так и площадь S к кругу $ABCD$. Но как площадь S к кругу $ABCD$, так и круг $EIHG$ к некоторой меньшей круга $ABCD$ площади (см. лемму); и значит, как квадрат на IG к квадрату на BD , так и круг $EIHG$ к некоторой меньшей круга $ABCD$ площади; это же, как было доказано, невозможно. Значит, не будет, что как квадрат на BD к квадрату на IG , так и круг $ABCD$ к некоторой большей круга $EIHG$ площади. Доказано же, что и не к меньшей; значит, будет, что как квадрат на BD к квадрату на IG , так и круг $ABCD$ к кругу $EIHG$.

Итак, круги будут друг к другу, как квадраты на диаметрах (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9).

Лемма*)

Вот я утверждаю, что если площадь S больше круга $EIHG$, то будет, что как площадь S к кругу $ABCD$, так и круг $EIHG$ к некоторой меньшей круга $ABCD$ площади

Действительно, сделаем, чтобы как площадь S к кругу $ABCD$, так и круг $EIHG$ к площади T . Я утверждаю, что площадь T будет меньше круга $ABCD$.

Действительно, поскольку будет, что как площадь S к кругу $ABCD$, так и круг $EIHG$ к площади T , то, значит, перестановкой (предложение 16 книги V) — как площадь S к кругу $EIHG$, так и круг $ABCD$ к площади T . Площадь же S больше круга $EIHG$; значит, и круг $ABCD$ больше площади T (предложение 14 книги V). Так что будет как площадь S к кругу $ABCD$, так и круг $EIHG$ к некоторой меньшей круга $ABCD$ площади, что и требовалось доказать.

Предложение 3

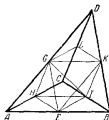
Всякая пирамида, имеющая треугольное основание, разделяется на две равные и подобные друг другу и [подобные] целой, имеющие треугольные основания пирамиды и на две равные призмы; и эти две призмы будут больше, чем половина целой пирамиды.

Пусть будет пирамида, основание которой есть треугольник ABC , вершина же точка D ; я утверждаю, что пирамида $ABCD$ разделяется на две пирамиды, равные друг другу, имеющие треугольные основания и подобные целой, и на две равные призмы; и что две призмы будут больше, чем половина целой пирамиды (черт. 3).

Действительно, разделим AB , BC , CA , AD , DB , DC пополам в точках E , I , H , G , K , L и соединим GE , EH , HG , GK , KL , LG , KI , IH . Поскольку AE равна EB , AG же — DG , то EG , значит, будет параллельна DB (предло-

*) Гейберг выражает сомнение в том, что эта лемма принадлежит Евклиду. В редакции Болонского списка эта лемма отступает, хотя латинское в нём доказательство очень близко даже по форме к общепринятому.

жение 2 книги VI). На основании того же вот и GK будет параллельна AB . Значит, $GEBK$ есть параллелограмм; значит, GK будет равна EB (предложение 34 книги I). Но EB равна EA ; значит, и AE равна GK . Также и AG равна GD ; вот две EA , AG равны двум KG , GD — каждая каждой, и угол EAG равен KGD (предложение 29 книги I); значит, основание EG равно основанию KD (предложение 4 книги I). Значит, треугольник AEG будет равен и подобен треугольнику GKD (предложение 4 книги I). На основании того же



Черт. 3.

вот и треугольник AGH будет равен и подобен треугольнику GLD . И поскольку две касающиеся друг друга прямые EG , GH будут параллельны двум касающимся друг друга прямым KD , DL , не находясь в той же самой плоскости, то они будут заключать равные углы (предложение 10 книги XI). Значит, угол EGH будет равен углу KDL . И поскольку две прямые EG , GH равны двум KD , DL — каждая каждой — и угол EGH равен углу KDL , то, значит, основание EH [будет] равно основанию KL ; значит, треугольник EGH будет равен и подобен треугольнику KDL (предложение 4 книги I). Вследствие того же вот и треугольник AEH будет равен и подобен треугольнику GKL . Значит, пирамида, основание которой треугольник AEH , вершина же точка G , будет равна и подобна пирамиде, основание которой треугольник GKL , вершина же точка D (определение 10 книги XI). И поскольку в треугольнике ADB параллельно одной из сторон, (именно) AB , проведена (прямая) GK , то треугольник ADB будет равноугольным с треугольником DGK (предложение 29 книги I), и они имеют пропорциональные стороны; значит, треугольник ADB будет подобен треугольнику DGK (определение 1 книги VI). На основании того же вот и треугольник DBL будет подобен треугольнику DKL , ADC же — DLG . И поскольку две касающиеся друг друга прямые BA , AC будут параллельны двум касающимся друг друга прямым KG , GL , не

«находясь» в той же самой плоскости, то они будут заключать равные углы (предложение 10 книги XI). Значит, угол BAC будет равен углу KGL . И будет, что как BA к AC , так и KG к CL ; значит, треугольник ABC будет подобен треугольнику GKL (предложение 6 книги VI). Значит, и пирамида, основание которой треугольник ABC , вершина же точка D , будет подобна пирамиде, основание которой треугольник GKL , вершина же точка D (определение 9 книги XI). Но пирамида, основание которой треугольник GKL , вершина же точка D , как доказано, подобна пирамиде, основание которой — треугольник AEN , вершина же точка G [так что и пирамида, основание которой треугольник ABC , вершина же точка D , будет подобна пирамиде, основание которой треугольник AEN , вершина же точка G]. Значит, каждая из пирамид $AENG$, $GKLD$ будет подобна целой пирамиде $ABCD$.

И поскольку BI равна IC , то параллелограмм $EBIH$ будет вдвое больше треугольника HIC (предложение 41 книги I). И поскольку, если будут две равновысотные призмы и одна имеет основанием параллелограмм, другая же треугольник, параллелограмм же вдвое больше треугольника, то эти призмы равны (предложение 39 книги XI), значит, призма, заключающаяся между двумя треугольниками BKI , EGH и тремя параллелограммами $EBIH$, $EBKG$, $GKIH$, будет равна призме, заключающейся между двумя треугольниками HIC , GKL и тремя параллелограммами $KICL$, $LCHG$, $GKIH$. И ясно, что каждая из призм — та, у которой основание параллелограмм $EBIH$, противоположное же — прямая GK , и та, у которой основание треугольник HIC , противоположное же — треугольник GKL , — будут больше каждой из пирамид, основания которых суть треугольники AEN , GKL , вершины же — точки G , D , поскольку ведь [и], если мы соединим прямыми EI , EK , то призма, основание которой параллелограмм $EBIH$, противоположное же — прямая GK , будет больше пирамиды, основание которой треугольник EBI , вершина же точка K . Но пирамида, основание которой треугольник EBI , вершина же — точка K , равна пирамиде, основание которой треугольник AEN , вершина же точка G , ибо они заключаются

между равными и подобными плоскостями. Таким образом, и призма, основание которой параллелограмм $EBIH$, противоположное же — прямая GK , будет больше пирамиды, основание которой треугольник AEH , вершина же точка G . Призма же, основание которой параллелограмм $EBIH$, противоположное же прямая GK , равна призме, основание которой треугольник HIC , противоположное же — треугольник GKL ; пирамида же, основание которой треугольник AEH , вершина же точка G , будет равна пирамиде, основание которой треугольник GKL , вершина же точка D . Значит, упомянутые две призмы будут больше упомянутых двух пирамид, основания которых треугольники AEH , GKL , вершины же точки G , D .

Итак, целая пирамида, основание которой треугольник ABC , вершина же точка D , разделена на две пирамиды, равные друг другу [и подобные целой], и на две равные призмы, и эти две призмы будут больше, чем половина целой пирамиды, что и требовалось доказать*).

Предложение 4

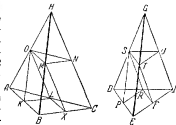
Если будут две пирамиды под той же самой высотой, имеющие треугольные основания, и каждая из них разделена на две пирамиды, равные друг другу и подобные целой (пирамиде), и на две равные призмы, то будет, что как основание одной пирамиды к основанию другой пирамиды, так и все призмы в одной пирамиде ко всем равным по количеству призмам в другой пирамиде.

Пусть будут две пирамиды под той же самой высотой, имеющие треугольные основания ABC , DEI , вершина же — в точках H , G , и пусть каждая из них будет разделена на две пирамиды, равные друг другу и подобные целой пирамиде, и на две равные призмы (предложение 3); я утверждаю, что будет — как основание ABC к основанию

*) В Болонском списке доказательство первой части предложения мало чем отличается от вышеприведенного, доказательство же второй части изложено гораздо короче; в частности, считается очевидным, что каждая из выделенных равных треугольных призм будет больше выделенных перед этим пирамид (*И. В.*).

DEI , так и все призм в пирамиде $ABCH$ ко всем равным по количеству призм в пирамиде $DEIG$ (черт. 4).

Действительно, поскольку $\langle \text{прямая} \rangle BX$ равна XC , AL же — LC (предложение 3), то, значит, LX будет параллельна AB и треугольник ABC подобен треугольнику LXC . На основании того же вот и треугольник DEI будет подобен треугольнику RFI . И поскольку BC вдвое больше CX , EI же — IF , то, значит, будет, что как BC к CX , так и EI к IF . И на BC , CX построены подобные и подобно расположенные прямоугольные $\langle \text{фигуры} \rangle^*$ ABC , LXC , а на EI , IF — подобные же и подобно расположенные [прямоугольные] $\langle \text{фигуры} \rangle$ DEI , RFI ; значит, будет (предложение 22 книги VI), что как треугольник ABC к треугольнику LXC , так и треугольник DEI к треугольнику RFI ; перестановкой, значит, будет (предложение 16



Черт. 4.

книги V), что как треугольник ABC к [треугольнику] DEI , так и [треугольник] LXC к треугольнику RFI . Но как треугольник LXC к треугольнику RFI , так и призма, основание которой треугольник LXC , противоположное же — $\langle \text{треугольник} \rangle OMN$, будет к призме, основание которой треугольник RFI , противоположное же STU (см. лемму); и значит, как треугольник ABC к треугольнику DEI , так и призма, основание которой треугольник LXC , противоположное же — OMN , $\langle \text{будет} \rangle$ к призме, основание которой треугольник RFI , противоположное же — STU . Как же упомянутые призм друг к другу, так и призма, основание которой параллелограмм $KBXI$, противоположное же — прямая OM , $\langle \text{будет} \rangle$ к призме, основание которой параллелограмм $PEFR$, противоположное же — прямая ST (пред-

* У Евклида просто $\epsilon\acute{\iota}\theta\eta\gamma\epsilon\gamma\gamma\alpha$.

ложение 3; предложение 39 книги XI). И значит, две призмы — та, у которой основание параллелограмма $KBXL$, противоположное же — (прямая) OM , и та, у которой основание LXC , противоположное же — OMN , (вместе взятые, будут) к призмам — той, у которой основание $PEFR$, противоположное же — прямая ST , и той, у которой основание треугольник PFI , противоположное же — STU (предложение 12 книги V). И значит, как основание ABC к основанию DEI , так и упомянутые две (первые) призмы к упомянутым двум (вторым) призмам.

И подобным же образом, если разделить пирамиды $OMNH$, $STUG$ на две призмы и две пирамиды, то будет, что как основание OMN к основанию STU , так и (находящиеся) в пирамиде $OMNH$ две призмы к двум призмам в пирамиде $STUG$. Но как основание OMN к основанию STU , так и основание ABC к основанию DEI , ибо каждый из треугольников OMN , STU (соответственно) равен каждому из треугольников LXC , RFI . И значит, как основание ABC к основанию DEI , так и (первые) четыре призмы ко (вторым) четырём пирамидам (предложение 12 книги V). Подобным же образом, если остающиеся пирамиды разделить на две пирамиды и две призмы, то будет, что как основание ABC к основанию DEI , так и все призмы в пирамиде $ABCH$ ко всем равным по количеству призмам в пирамиде $DEIG$, что и требовалось доказать (10).

Лемма

А что будет, что, как треугольник LXC к треугольнику RFI , так и призма, основание которой треугольник LXC , противоположное же — DMV , к призме, основание которой [треугольник] RFI , противоположное же — STU , то что нужно доказать так.

На том же самом чертеже вообразим из точек H , O на плоскости ABC , DEI перпендикуляры, которые, конечно, оказываются равными вследствие того, что обе пирамиды предположены равновысотными. И поскольку две прямые, именно HC и опущенный из H перпендикуляр, пересекаются параллельными плоскостями ABC , OMN , то они

будут рассеяны в тех же самых отношениях (предложение 17 книги XI). И HC рассеена плоскостью OMN в (точке) N пополам; значит, и опущенный из H на плоскость ABC перпендикуляр рассеется плоскостью OMN пополам. На основании того же вот и перпендикуляр из G на плоскость DEI рассеется пополам плоскостью STU . И перпендикуляры из H, G на плоскости ABC, DEI будут равны; значит, равны будут и перпендикуляры из (любых точек) треугольников OMN, STU на плоскости ABC, DEI . Значит, призмы, основания которых треугольники LXC, RFI , противоположные же (границы) — OMN, STU , будут равновысотными. Так что и параллелепипедальные тела, построенные на упомянутых призмах, (будут) равновысотными и [будут] друг к другу, как основания (предложение 32 книги XI); значит, и (для их) попарно будет, что как основание LXC к основанию RFI , так и вышеупомянутые призмы будут друг к другу, что и требовалось доказать*).

Предложение 5

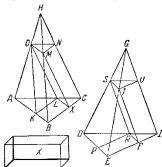
Находящиеся под той же самой высотой пирамиды, имеющие треугольные основания, будут друг к другу, как основания.

Пусть будут под той же самой высотой пирамиды, основания которых — треугольники ABC, DEI , вершины же — в точках H, G ; я утверждаю, что будет как основание ABC к основанию DEI , так и пирамида $ABCH$ к пирамиде $DEIG$ (черт. 5).

Действительно, если не будет, что как основание ABC к основанию DEI , так и пирамида $ABCH$ к пирамиде $DEIG$, то будет, что как основание ABC к основанию DEI , так и пирамида $ABCH$ или к некоторому меньшему, чем пирамида $DEIG$, телу, или же к большему. Пусть будет сначала к меньшему, X , и разделим пирамиду $DEIG$ на две пирамиды, равные друг другу и подобные целой, и на две разные призмы; вот две призмы будут больше, чем половина целой пирамиды (предложение 3). И затем полученные при

* Гейберг считает сомнительной принадлежность этой леммы Евклиду как по существу же, так и по основанию ее стиля.

делении пирамиды разделим подобным образом и будем так постоянно делать, пока от пирамиды $DEIG$ не останутся какие-то пирамиды, которые будут меньше того избытка, на который пирамида $DEIG$ превосходит тело X (предложение 1 книги X). Пусть останутся и будут, например, (пирамиды) $DPRS$, $STUG$; тогда все остальные призмы в пирамиде $DEIG$ будут больше тела X . Подобным же образом разделим и пирамиду $ABCH$ на равное количество



Черт. 5.

(призм), как и пирамиду $DEIG$; значит, будет, что как основание ABC к основанию DEI , так и призмы в пирамиде $ABCH$ к призмам в пирамиде $DEIG$ (предложение 4). Но как основание ABC к основанию DEI , так и пирамида $ABCH$ к телу X ; и значит, как пирамида $ABCH$ к телу X , так и призмы в пирамиде $ABCH$ к призмам в пирамиде $DEIG$; значит, перестановкой (предложение 16 книги V), как пирамида $ABCH$ к (находящимся) в ней призмам, так и тело X к призмам, (находящимся) в пирамиде $DEIG$. Пирамида $ABCH$ больше (находящихся) в ней призм; значит, и тело X больше призм, (находящихся) в пирамиде $DEIG$ (предложение 14 книги V). Но оно и меньше (их); это же невозможно. Значит, не будет, что как основание ABC к основанию DEI , так и пирамида $ABCH$ к некоторому телу, меньшему, чем пирамида $DEIG$. Вот подобным же образом докажется, что не будет и как основание DEI к основанию ABC , так и пирамида $DEIG$ к некоторому телу, меньшему, чем пирамида $ABCH$.

Вот я утверждаю, что не будет также, что и как основание ABC к основанию DEI , так и пирамида $ABCH$ к некоторому телу, большему, чем пирамида $DEIG$.

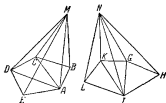
Действительно, если возможно, то пусть к большему <телу> X ; значит, обратно (предложение 7 книги V, следствие), будет, что как основание DEI к основанию ABC , так и тело X к пирамиде $ABCH$. Как же тело X к пирамиде $ABCH$, так и пирамида $DEIG$ к некоторому <телу>, меньшему, чем пирамида $ABCH$, как было доказано выше (предложение 2, лемма); и значит, как основание DEI к основанию ABC , так и пирамида $DEIG$ к некоторому <телу>, меньшему, чем пирамида $ABCH$; что, как доказано, нелепо. Значит, не будет, что как основание ABC к основанию DEI , так и пирамида $ABCH$ к некоторому телу, большему, чем пирамида $DEIG$. Доказано же, что и не к меньшему. Значит, будет, что как основание ABC к основанию DEI , так и пирамида $ABCH$ к пирамиде $DEIG$, что и требовалось доказать.

Предложение 6

Находящиеся под той же самой высотой пирамиды, имеющие многоугольные основания, будут друг к другу как основания.

Пусть будут под той же самой высотой пирамиды, основания которых многогранники $ABCDE$, $IHGKL$, вершины же в точках M , N ; я утверждаю, что будет как основание $ABCDE$ к основанию $IHGKL$, так и пирамида $ABCDEM$ к пирамиде $IHGKLN$ (черт. 6).

Действительно, соединив AC , AD , IG , IK . Поскольку теперь будут две пирамиды $ABCM$, $ACDM$, имеющие треугольные основания и одинаковую высоту, то они будут друг к другу как основания (предложение 5); значит, будет, что как основание ABC к основанию ACD , так и пирамида $ABCM$ к пирамиде $ACDM$. И «соединяя» (предложение 18 книги V), как основание $ABCD$ к основанию ACD ,



Черт. 6.

так и пирамида $ABCDM$ к пирамиде $ACDM$. Но и как основание ACD к основанию ADE , так и пирамида $ACDM$ к пирамиде $ADEM$ (предложение 5). Значит, «по равенству» (предложение 22 книги V), как основание $ABCD$ к основанию ADE , так и пирамида $ABCDM$ к пирамиде $ADEM$. И опять, «соединяя» (предложение 18 книги V), как основание $ABCDE$ к основанию ADE , так и пирамида $ABCDEM$ к пирамиде $ADEM$. Подобным же образом докажется, что и как основание $IHKL$ к основанию IHZ , так и пирамида $IHGKLN$ к пирамиде $IHSV$. И поскольку есть две пирамиды $ADEM$, $IHGN$, имеющие треугольные основания и одинаковую высоту, то, значит, будет (предложение 5), что как основание ADE к основанию IHG , так и пирамида $ADEM$ к пирамиде IHN . Но как основание ADE к основанию $ABCE$, так была и пирамида $ADEM$ к пирамиде $ABCEM$. И значит, «по равенству» (предложение 22 книги V), как основание $ABCDE$ к основанию IHG , так и пирамида $ABCDEM$ к пирамиде $IHGN$. Но так же, как основание IHG к основанию $IHKL$, так была и пирамида $IHGN$ к пирамиде $IHGKLN$. И значит, «по равенству» (предложение 22 книги V), как основание $ABCDE$ к основанию $IHGKL$, так и пирамида $ABCDEM$ к пирамиде $IHGKLN$, что и требовалось доказать *).

Предложение 7

Всякая призма, имеющая треугольное основание, разделяется на три равные друг другу пирамиды, имеющие треугольные основания.

Пусть будет призма, основание которой треугольник ABC , противоположная же (грань) — DEF ; я утверждаю, что призма $ABCDEF$ разделяется на три равные друг другу пирамиды, имеющие треугольные основания (черт. 7).

Действительно, соединим BD , EC , CD . Поскольку $ABED$ — параллелограмм, диаметр же его BD , то, значит,

* Это предложение отсутствует в Бюловском манускрипте. (И. В.)

треугольник ABD будет равен треугольнику EBD (предложение 34 книги I); и значит, пирамида, основание которой треугольник ABD , вершина же в точке C , будет равна пирамиде, основание которой треугольник DEB , вершина же в точке C (предложение 3), которая будет тождественна пирамиде, основание которой треугольник EBC , вершина же в точке D , ибо она заключаются между теми же самыми плоскостями. И значит, пирамида, основание которой треугольник ABD , вершина же в точке C , будет равна пирамиде, основание которой треугольник EBC , вершина же в точке D . Затем, поскольку $ICBE$ — параллелограмм, диаметр же его CE , то треугольник CEI будет равен треугольнику CBE (предложение 34 книги I). И, значит, пирамида, основание которой треугольник BCE , вершина же в точке D , будет равна пирамиде, основание которой треугольник ECI , вершина же в точке D . Пирамида же, основание которой треугольник BCE , вершина же в точке D , как доказано было, равна пирамиде, основание которой треугольник ABD , вершина же в точке C ; и значит, пирамида, основание которой треугольник CEI , вершина же в точке D , равна будет пирамиде, основание которой треугольник ABD , вершина же в точке C ; значит, призма $ABCDEI$ разделена на три равные друг другу пирамиды, имеющие треугольные основания.



Черт. 7.

И поскольку пирамида, основание которой треугольник ABD , вершина же в точке C , тождественна пирамиде, основание которой треугольник CAB , вершина же в точке D (ибо она заключаются между теми же плоскостями), пирамида же, основание которой треугольник ABD , вершина же в точке C , оказалась третьей призмы, основание которой треугольник ABC , противоположная же <грань> DEI , то, значит, пирамида, основание которой треугольник ABC , вершина же в точке D , будет третьей призмы, имеющей то же самое основание, именно — треугольник ABC , противоположную же <грань> — DEI .

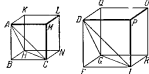
Следствие

Из этого вот ясно, что всякая пирамида будет третьей частью призмы, имеющей с ней то же самое основание и одинаковую высоту [поскольку ведь если бы основание призмы имело и какую-нибудь другую прямолинейную фигуру, то такую же <фигуру имела бы> и противоположная <грань>, и <эта призма> разделяется на призмы с треугольными основаниями и противоположными <им гранями>, и как всё основание к каждому...]*), что и требовалось доказать.

Предложение 8

Подобные пирамиды, имеющие треугольные основания, будут в тройном отношении соответственных сторон.

Пусть будут подобные и подобно расположенные пирамиды, у которых основания суть треугольники ABC , DEI , вершины же в точках H , G ; я утверждаю, что пирамида $ABCH$ к пирамиде $DEIG$ имеет тройное отношение BC к EI (черт. 8).



Черт. 8.

Действительно дополним параллелепипедальные тела $BHML$, $EGPO$. И поскольку пирамида $ABCH$

подобна пирамиде $DEIG$, то, значит, угол ABC будет равен углу DEI , HBC же — GEI , ABH же — DEG , и будет как AB к DE , так и BC к EI , и BH к EG (определение 9 книги XI). И поскольку как AB к DE , так и BC к EI , и стороны при равных углах пропорциональны, то, значит, параллелограмм BAI будет подобен параллелограмму EP . На том же вл основания и BN будет подобен ER , BK же — EQ ; значит, три <параллелограмма> MB , BK , BN подобны трём EP , EQ , ER . Но эти три MB , BK , BN будут равны и

*) Выражение, стоящее в скобках, Гейберг считает не принадлежащим Евклиду, но говоря уже о том, что отмеченное доказательство так и осталось незаконченным, обрываясь на полуфразе.

подобны <своим> трём противоположным, другие же три EP , EQ , ER будут также равны и подобны трём противоположным (предложение 24 книги XI). Значит, тела $BHML$, $EGPO$ заключаются между подобными плоскостями в равном количестве. Значит, тело $BHML$ будет подобно телу $EGPO$ (определение 9 книги XI). Подобные же параллелепипедальные тела будут в тройном отношении соответственных сторон (предложение 33 книги XI). Значит, тело $BHML$ к телу $EGPO$ имеет тройное отношение соответственной стороны BC к соответственной стороне EI . Как же тело $BHML$ к телу $EGPO$, так и пирамида $ABCH$ к пирамиде $DEIG$, поскольку ведь пирамида будет шестой частью тела вследствие того, что призма, будучи половиной параллелепипедального тела (предложение 28 книги XI), является утроенной пирамидой (предложение 7). И значит, пирамида $ABCH$ к пирамиде $DEIG$ имеет тройное отношение BC к EI , что и требовалось доказать.

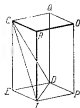
Следствие

Из этого вот ясно, что и имеющие многоугольные основания подобные пирамиды будут друг к другу в тройном отношении соответственных сторон. Действительно, если их разделить на <содержащиеся> в них пирамиды, имеющие треугольные основания, <в результате> деления подобных многоугольников оснований на подобные треугольники в равном количестве и в одинаковом отношении с целыми <основаниями> (предложение 20 книги VI), то будет, что как одна пирамида, имеющая треугольное основание, в одной к одной пирамиде, имеющей треугольное основание, в другой, так и все, имеющие треугольные основания пирамиды в одной пирамиде, ко всем, имеющим треугольные основания пирамид в другой пирамиде (предложение 12 книги V), то-есть эта, имеющая многоугольное основание пирамида к <другой>, имеющей многоугольное основание пирамиде. Имеющая же треугольное основание пирамида к имеющей треугольное основание будет в тройном отношении соответственных сторон (предложение 8); и значит, имеющая многоугольное основание к имеющей подобное основание имеет тройное отношение стороны к стороне (11, 12, 13).

Предложение 9

У равных пирамид, имеющих треугольные основания, основания обратно пропорциональны высотам; и у каких пирамид, имеющих треугольное основание, основания обратно пропорциональны высотам, те (пирамиды) будут равны.

Пусть будут равные пирамиды, имеющие треугольные основания ABC , DEI , вершины же в точках H , G ; и утверждаю, что у пирамид $ABCH$, $DEIG$ основания обратно про-



Черт. 9.



порциональны высотам, и что будет — как основание ABC к основанию DEI , так и высота пирамиды $DEIG$ к высоте пирамиды $ABCH$ (черт. 9).

Действительно, дополним параллелепипедальные тела $BHML$, $EGPO$. И поскольку пирамида $ABCH$ равна пирамиде $DEIG$, и тело $BHML$ в шесть раз больше пирамиды $ABCH$, а тело $EGPO$ в шесть раз больше пирамиды $DEIG$ (предложение 8), то, значит, тело $BHML$ равно будет телу $EGPO$. У равных же параллелепипедальных тел основания обратно пропорциональны высотам (предложение 34 книги XI); значит, будет — как основание BM к основанию EP , так и высота тела $EGPO$ к высоте тела $BHML$. Но как основание BM к EP , так и треугольник ABC к треугольнику DEI (предложение 34 книги I). И значит, как треугольник ABC к треугольнику DEI , так и высота тела $EGPO$ к высоте тела $BHML$. Но высота тела $EGPO$ тождественна с высотой пирамиды $DEIG$, высота же тела $BHML$ тождественна с высотой пирамиды $ABCH$; значит, будет, что как основание ABC к основанию DEI , так и высота пирамиды $DEIG$ к высоте пирамиды $ABCH$. Значит, у пирамид $ABCH$, $DEIG$ основания обратно пропорциональны высотам.

Но вот пусть у пирамид $ABCH$, $DEIG$ основания обратно пропорциональны высотам, и пусть будет как основание ABC

к основанию DEI , так и высота пирамиды $DEIG$ к высоте пирамиды $ABCH$; я утверждаю, что пирамида $ABCH$ будет равна пирамиде $DEIG$.

Действительно, <после> тех же самых построений, поскольку будет, что как основание ABC к основанию DEI , так и высота пирамиды $DEIG$ к высоте пирамиды $ABCH$, но как основание ABC к основанию DEI , так и параллелограмм BM к параллелограмму EP (предложение 34 книги I), то, значит, и как параллелограмм BM к параллелограмму EP , так и высота пирамиды $DEIG$ к высоте пирамиды $ABCH$. Но высота пирамиды $DEIG$ тождественна с высотой параллелепипеда $EGPO$, высота же пирамиды $ABCH$ тождественна с высотой параллелепипеда $BHML$; значит, будет, что как основание BM к основанию EP , так и высота параллелепипеда $EGPO$ к высоте параллелепипеда $BHML$. У каких же параллелепипедальных тел основания обратно пропорциональны высотам, те <тела> будут равны; значит, параллелепипедальное тело $BHML$ будет равно параллелепипедальному телу $EGPO$. И шестая часть $BHML$ есть пирамида $ABCH$, шестая же часть параллелепипеда $EGPO$ — пирамида $DEIG$; значит, пирамида $ABCH$ равна пирамиде $DEIG$.

Итак, у равных пирамид, имеющих треугольные основания, основания обратно пропорциональны высотам, и у каких пирамид, имеющих треугольное основание, основания обратно пропорциональны высотам, те <пирамиды> будут равны, что и требовалось доказать (14, 15).

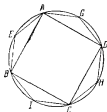
Предложение 10

Всякий конус есть третья часть цилиндра, имеющего с ним то же самое основание и одинаковую высоту.

Пусть конус будет иметь с цилиндром то же самое основание — круг $ABCD$ — и одинаковую высоту; я утверждаю, что конус будет третьей частью этого цилиндра, то-есть, что цилиндр будет втрое больше этого конуса (черт. 10).

Действительно, если цилиндр не будет в три раза больше этого конуса, то цилиндр будет больше конуса или более

чем в три раза, или менее чем в три раза. Пусть сперва будет более чем в три раза больше, и впишем в круг $ABCD$ квадрат $ABCD$ (предложение 6 книги IV); вот квадрат $ABCD$ будет больше, чем половина круга $ABCD$. И восставим на квадрате $ABCD$ равновысокую с цилиндром призму. Вот восставленная призма будет больше, чем половина цилиндра, поскольку если мы около круга $ABCD$ опишем квадрат (предложение 7 книги IV), то квадрат, вписанный в круг $ABCD$, будет половиной описанного; и восставленные на них тела будут равновысокими параллелепипедами; находящиеся же под той же высотой параллелепипедальные тела будут друг к другу как основания (предложение 32



Черт. 10.

книги XI); и значит, восставленная на квадрате $ABCD$ призма будет половиной призмы, восставленной на квадрате, описанном около круга $ABCD$; и цилиндр будет меньше призмы, восставленной на описанном около круга $ABCD$ квадрате; значит, и равновысокая с цилиндром призма, восставленная на квадрате $ABCD$, будет больше половины цилиндра. Разделим обводы AB , BC , CD , DA пополам в точках E , I , H , G и соединим AE , EB , BI , IC , CH , HD , DG , GA ; и значит, каждый из треугольников AEB , BIC , CHD , DGA будет больше, чем половина $\langle$ соответствующего $\rangle$ ему сегмента круга $ABCD$, как мы доказали выше (см. в предложении 2). На каждом из треугольников AEB , BIC , CHD , DGA восставим равновысокие с цилиндром призмы; и значит, каждая из восставленных призм будет больше, чем половинная часть $\langle$ соответствующего $\rangle$ ей сегмента цилиндра, поскольку если через точки E , I , H , G проведем параллели $\langle$ прямым $\rangle$ AB , BC , CD , DA , доложим параллелограммы на параллелях AB , BC , CD , DA и восставим на них равновысокие с цилиндром параллелепипедальные тела, то половинками каждого из этих восставленных $\langle$ тел $\rangle$ будут те призмы, что на треугольниках AEB , BIC , CHD , DGA ; и сегменты цилиндра будут меньше восставленных параллелепипедальных тел; так

что и призмы на треугольниках AEB , BIC , CHD , DGA будут больше, чем половины (соответствующих) им сегментов цилиндра. Вот, деля остающиеся обзолы пополам, соединяя прямыми, восстанавливая на каждом из треугольников равновысокие с цилиндром призмы и делая так постоянно, мы получим в остатке некоторые отрезочки цилиндра, которые (вместе) будут меньше того избытка, на который цилиндр превосходит утроенный конус (предложение 1 книги X). Пусть (такой) остаток получен и будет (вместе взятыми отрезочками) AE , EB , BI , IC , CH , HD , DG , GA ; значит, остающаяся призма, основание которой многоугольник $AEBICHHDG$, а высота та же, что и у цилиндра, будет больше утроенного конуса. Но призма, основание которой многоугольник $AEBICHHDG$, а высота та же, что и у цилиндра, будет втрое больше пирамиды, основание которой многоугольник $AEBICHHDG$, вершина же та же, что и у конуса (предложение 7, следствие); значит, и пирамида, основание которой [есть] многоугольник $AEBICHHDG$, вершина же та же, что и у конуса, будет больше конуса, имеющего основанием круг $ABCD$. Но (она вместе с тем) и меньше, ибо она им объемлется; это же невозможно. Значит, цилиндр не будет более чем втрое больше конуса.

Вот я утверждаю, что цилиндр не будет и менее чем втрое больше конуса.

Действительно, если возможно, то пусть цилиндр будет меньше утроенного конуса; значит, обратно, конус будет больше, чем третья часть цилиндра. Вот впишем в круг $ABCD$ квадрат $ABCD$ (предложение 6 книги IV); значит, квадрат $ABCD$ будет больше, чем половина круга $ABCD$. И на квадрате $ABCD$ восстановим пирамиду, имеющую ту же самую вершину, что и конус; значит, восстановленная пирамида будет больше половиной части конуса, поскольку как мы доказали перед этим, что если описать около круга квадрат (предложение 7, книги IV), то квадрат $ABCD$ будет половиной квадрата, описанного около круга; и если на квадратах мы восстановим равновысокие с конусом параллелепипедальные тела, которые называются также призмами, то восстановленное на квадрате $ABCD$ (тело) будет половиной восстановленного на описанном около круга квадрате, ибо

они будут друг к другу, как основания (предложение 32 книги XI). Так же <будут> и их трети; и значит, пирамида, основание которой квадрат $ABCD$, будет половиной пирамиды, восстановленной на описанном около круга квадрате (предложение 7, следствие). И пирамида, восстановленная на квадрате, что около круга, будет больше конуса, ибо она его объемлет. Значит, пирамида, основание которой квадрат $ABCD$, вершина же та же самая, что и у конуса, будет больше, чем половина конуса. Разделим обводы AB , BC , CD , DA пополам в точках E , I , H , G и соединим AE , EB , BI , IC , CH , HD , DG , GA ; и значит, каждый из треугольников AEB , BIC , CHD , DGA будет больше, чем половинная часть <соответствующего> ему сегмента круга $ABCD$. И восстановим на каждом из треугольников AEB , BIC , CHD , DGA пирамиды, имеющие ту же самую вершину, что и конус; и значит, каждая из восстановленных пирамид по тому же самому способу <рассуждения> будет больше, чем половинная часть <соответствующего> ей сегмента конуса. Вот, разделяя остающиеся обводы пополам, соединяя прямыми, строя на каждом из треугольников пирамиду, имеющую ту же самую вершину, что и конус, и делая это постоянно, мы получим в остатке некоторый отрезочек конуса, который будет меньше того избытка, на который конус превосходит третью часть цилиндра (предложение 1 книги X). Пусть <такой> остаток излучен, и пусть это будут <отрезки> на AE , EB , BI , IC , CH , HD , DG , GA ; значит, остающаяся пирамида, основание которой есть многоугольник $AEBICHHDG$, вершина же та же самая, что и у конуса, будет больше, чем третья часть цилиндра. Но пирамида, основание которой многоугольник $AEBICHHDG$, вершина же та же самая, что и у конуса, будет третьей частью призмы, основание которой многоугольник $AEBICHHDG$, а высота та же, что и у цилиндра; значит, призма, основание которой многоугольник $AEBICHHDG$, а высота та же, что и у цилиндра, будет больше цилиндра, основание которого круг $ABCD$. Но <она также> и меньше, ибо объемлется им; это же невозможно. Значит, цилиндр не будет менее чем в три раза больше конуса. Доказано же, что и не более чем в три раза больше; значит, цилиндр будет втрое

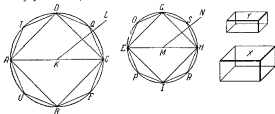
больше конуса, так что конус будет третьей частью цилиндра.

Итак, всякий конус есть третья часть цилиндра, имеющего с ним то же самое основание и одинаковую высоту, что и требовалось доказать.

Предложение 11

Находящиеся под той же самой высотой конусы и цилиндры будут друг к другу, как основания.

Пусть под той же самой высотой будут конусы и цилиндры, основания которых [суть] круги $ABCD$, $EIHG$, оси же KL , MN , диаметры же оснований — AC , EH ; я утверждаю, что будет как круг $ABCD$ к кругу $EIHG$, так и конус AL к конусу EN (черт. 11).



Черт. 11.

Действительно, если нет, то пусть будет как круг $ABCD$ к кругу $EIHG$, так и конус AL или к некоторому меньшему конусу EN телу, или к большему. Пусть сперва будет к меньшему X , и пусть тело Y будет равно тому, чем тело X меньше конуса EN ; значит, конус EN будет равен (вместе взятым) телам X , Y . Впишем в круг $EIHG$ квадрат $EIHG$ (предложение 6 книги IV); значит, этот квадрат будет больше, чем половина круга. Восставим на квадрате $EIHG$ равновысокую с конусом пирамиду; значит, восстановленная пирамида будет больше, чем половина конуса, поскольку, если около круга опишем квадрат (предложение 7 книги IV), и восставим на нём равновысокую с конусом пирамиду, то вписанная пирамида будет половиной описанной; ибо они

будут друг к другу, как основания (предложение 6); конус же меньше описанной пирамиды. Разделим обводы EI , $I\Gamma$, $H\Gamma$, GE пополам в точках G , P , R , S и соединим GG , OE , EP , PI , IR , RH , HS , SG . Значит, каждый из треугольников QOE , EPI , IRH , HSG будет больше, чем половина <соответствующего> сечу сегмента круга. Восставим на каждом из треугольников QOE , EPI , IRH , HSG равновысокую с конусом пирамиду; и значит, каждая из восставленных пирамид будет больше, чем половина <соответствующего> ей сегмента конуса. Вот разделяя пополам остающиеся обводы, соединяя прямыми, восставляя на каждом из треугольников равновысокие с конусом пирамиды и делая так постоянно, мы получим в остатке некоторый отрезок конуса, который будет меньше тела Y (предложение 1 книги X). Пусть <такой отрезок> получен и будет <представлять сегменты> на GGE , EPI , IRH , HSG ; значит, остающаяся пирамида, основание которой многоугольник $GOEPIRHS$, а высота та же, что и у конуса, будет больше тела X . Внемлем и в круг $ABCD$ подобный и подобно расположенный с многоугольником $GOEPIRHS$ многоугольником $DTAUBFCQ$ и восставим на нём равновысокую с конусом AL пирамиду. Поскольку теперь будет, что как <квадрат> на AC к <квадрату> на EH , так и многоугольник $DTAUBFCQ$ к многоугольнику $GOEPIRHS$ (предложение 1), как же <квадрат> на AC к <квадрату> на EH , так и круг $ABCD$ к кругу $EIHQ$ (предложение 2), то, значит, и как круг $ABCD$ к кругу $EIHQ$, так и многоугольник $DTAUBFCQ$ к многоугольнику $GOEPIRHS$. Как же круг $ABCD$ к кругу $EIHQ$, так и конус AL к телу X , как же многоугольник $DTAUBFCQ$ к многоугольнику $GOEPIRHS$, так и пирамида, основание которой многоугольник $DTAUBFCQ$, вершина же в точке L , к пирамиде, основание которой многоугольник $GOEPIRHS$, вершина же в точке N (предложение 6). И значит, как конус AL к телу X , так и пирамида, основание которой многоугольник $DTAUBFCQ$, вершина же в точке L , к пирамиде, основание которой многоугольник $GOEPIRHS$, вершина же в точке N ; переставляя (предложение 16 книги V), значит, будет — как конус AL к <находящейся> в нём пирамиде, так и тело X к <находящейся> в конусе EN пирамиде. Конус же AL больше пира-

милы в нём; значит, и тело X больше пирамиды в конусе EN (предложение 14 книги V). Но (оно также) и меньше; что же нелепо. Значит, не будет, что как круг $ABCD$ к кругу $EIHG$, так и конус AL к некоторому меньшему конуса EN телу. Подобным же вот образом докажем, что не будет как круг $EIHG$ к кругу $ABCD$, так и конус EN к некоторому меньшему конуса AL телу.

Вот я утверждаю, что не будет и как круг $ABCD$ к кругу $EIHG$, так и конус AL к некоторому большему конуса EN телу.

Действительно, если возможно, то пусть будет к большему X ; обратно (предложение 7 книги V, следствие), значит, будет, что как круг $EIHG$ к кругу $ABCD$, так и тело X к конусу AL . Но как тело X к конусу AL , так и конус EN к некоторому меньшему конуса AL телу (предложение 2, лемма); и значит, как круг $EIHG$ к кругу $ABCD$, так и конус EN к некоторому меньшему конуса AL телу; это же, как доказано, невозможно. Значит, не будет, что как круг $ABCD$ к кругу $EIHG$, так и конус AL к некоторому большему конуса EN телу. Доказано же, что и не к меньшему; значит, будет, что как круг $ABCD$ к кругу $EIHG$, так и конус AL к конусу EN .

Но как конус к конусу, так и цилиндр к цилиндру; ибо каждый каждого втрое больше (предложение 10). И значит, как круг $ABCD$ к кругу $EIHG$, так и (восставленные) на них равновысокие [с конусами] цилиндры *).

Итак, находящиеся под той же самой высотой конусы и цилиндры будут друг к другу, как основания

Предложение 12

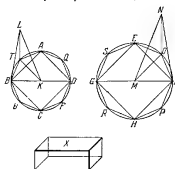
Подобные конусы и цилиндры будут друг к другу в тройном отношении диаметров оснований.

Пусть будут подобные конусы и цилиндры, основания которых круги $ABCD$, $EIHG$, диаметры же оснований BD , IG , оси же конусов и цилиндров KL , MN ; я утверждаю,

*) Слова в квадратных скобках, вероятно, представляют очень древнюю глоссу, так как по существу дело идёт о равновысоких между собой цилиндрах (Гейберг).

что конус, основание которого [есть] круг $ABCD$, вершина же точка L , к конусу, основание которого [есть] круг $EIHG$, вершина же точка N , имеет тройное отношение BD к IG (черт. 12).

Действительно, если конус $ABCDL$ к конусу $EIHGN$ не имеет тройного отношения BD к IG , то конус $ABCD$ будет иметь тройное отношение или к какому-нибудь телу, меньшему конуса $EIHGN$, или же к большему. Пусть



Черт. 12.

сначала он будет иметь к меньшему X , и в круг $EIHG$ впишем квадрат $EIHG$ (предложение 6 книги IV); значит, квадрат $EIHG$ будет больше половины круга $EIHG$. И восставим на квадрате $EIHG$ пирамиду, имеющую с конусом ту же самую вершину; значит, восставленная пирамида будет больше, чем половинная часть конуса. Вот разделим обводы EI , IH , HG , GE пополам в точках O , P , R , S и соединим EO , OI , IP , PH , HR , RQ , GS , SE . И значит, каждый из треугольников EOI , IPH , HRQ , GSE будет больше, чем половинная часть <соответствующего> ему сегмента круга. И на каждом из треугольников EOI , IPH , HRQ , GSE восставим пирамиду, имеющую ту же самую вершину, что и конус; и, значит, каждая из восставленных пирамид будет больше, чем половинная часть <соответствующего> ей сегмента конуса. Вот, разделяя пополам остающиеся обводы, соединяя прямые, восставляя на каждом из треугольников пирамиды, имеющие ту же вершину, что и конус, и делая это постоянно, получим в остатке некоторый отрезочек конуса, который будет меньше того избытка, на какой конус $EIHGN$ превосхо-

дит тело X . Пусть он получен и будет <взятыми вместе отрезочками> на EO , OI , IP , PH , HR , RQ , QS , SE ; значит, остающаяся пирамида, основание которой есть многоугольник $EOIPHRQS$, вершина же точка N , будет больше тела X . Вспомогательный в круг $ABCD$ подобный многоугольник $EOIPHRQS$ и подобно <с ним> расположенный многоугольник $ATBUCFDQ$ (предложение 18 книги VI), и восстановим на многоугольнике $ATBUCFDQ$ пирамиду, имеющую ту же самую вершину, что и конус, и пусть LBT будет один из треугольников, объемлющих пирамиду, основание которой есть многоугольник $ATBUCFDQ$, вершина же точка L , а NIO — один из треугольников, объемлющих пирамиду, основание которой многоугольник $EOIPHRQS$, вершина же точка N , и соединим KT , MO . И поскольку конус $ABCDL$ подобен конусу $EIHG$, то, значит, будет, что как BD к IG , так и ось KL к оси MN (определение 24 книги XI). Как же BD к IG , так и BK к IM ; и значит, как BK к IM , так и KL к IN . И перестановкой (предложение 16 книги V) — как BK к KL , так и IM к MN . И при равных углах BKL , IMN стороны пропорциональны; значит, треугольник BKL будет подобен треугольнику IMN (предложение 6 книги VI). Затем, поскольку будет, что как BK к KT , так и IM к MO , и <они> при равных углах BKT , IMO , так как вот какой частью четырех прямых при центре K является угол BKT , той же самой частью четырех прямых при центре M будет и угол IMO ; поскольку теперь при равных углах стороны пропорциональны, то, значит, треугольник BKT будет подобен треугольнику IMO . Затем, поскольку доказано, что как BK к KL , так и IM к MN , и BK равна KT , IM же — OM , то, значит, будет, что как TK к KL , так и OM к MN . И при равных углах TKL , OMN (ибо они прямые) стороны пропорциональны; значит, треугольник LKT будет подобен треугольнику NMO (предложение 6 книги VI). И поскольку вследствие подобия треугольников LKB , NMI будет, что как LB к BK , так и NI к IM , вследствие же подобия треугольников BKT , IMO будет, что как KB к BT , так и MI к IO (определение 1 книги VI), то, «по равенству» (предложение 22 книги V), как LB к BT , так и NI к IO . Затем, вследствие подобия

треугольников LTK , NOM будет, что как LT к TK , так и NO к OM , вследствие же подобия треугольников TKB , OMI будет, что как KT к TB , так и MO к OI , то «по равенству», значит, как LT к TB , так и NO к OI . Доказано же, что и как TB к BL , так и OI к IN . «По равенству», значит, как TL к LB , так и ON к NI . Значит, у треугольников LTV , NOI стороны пропорциональны; значит треугольники LTV , NOI равноугольны (предложение 5 книги VI); так что они и подобны (определение 1 книги VI). И значит, пирамида, основание которой треугольник BKT , вершина же точка L , будет подобна пирамиде, основание которой треугольник IMO , вершина же точка N , ибо они заключаются между равными по количеству подобными плоскостями (определение 9 книги XI). Подобные же пирамиды, имеющие треугольные основания, будут друг к другу в тройном отношении соответственных сторон (предложение 8). Значит, пирамида $BKTL$ к пирамиде $IMON$ имеет тройное отношение BK к IM . Подобным же вот образом, соединяя прямыми от A , Q , D , F , C , U к K и от E , S , G , R , H , P к M и восставляя на каждом из треугольников пирамиды, имеющие ту же вершину с конусами, докажем, что каждая занимающая *) определенное положение пирамида к каждой занимающей такое же положение пирамиде будет иметь тройное отношение соответствующей стороны BK к соответствующей стороне IM , то-есть <отношение> BD к IG . И как один из предыдущих к одному из последующих, так и все предыдущие ко всем последующим (предложение 12 книги V); значит, будет, что и как пирамида $BKTL$ к пирамиде $IMON$, так и вся пирамида, у которой основание многоугольник $ATBUCFDQ$, вершина же точка L , ко всей пирамиде, основание которой многоугольник $EOIPHRGS$, вершина же точка N ; так что и пирамида, основание которой $ATBUCFDQ$, вершина же L , к пирамиде, основание которой многоугольник $EOIPHRGS$, вершина же точка N , имеет тройное отношение BD к IG . Предполагается же, что и конус, основание которого круг $ABCD$, вершина же точка L , имеет к телу X тройное

*) В подлиннике *εἰστέταται* — от *εἰς* — подобий и *τάττω* — ставлю по порядку.

отношение BD к IG ; значит, будет, что как конус, основание которого круг $ABCD$, вершина же L , к телу X , так и пирамида, основание которой [многоугольник] $ATBUCFDQ$, вершина же L , к пирамиде, основание которой многоугольник $EOIPHRGS$, вершина же N ; значит, «переставляемый» (предложение 16 книги V), как конус, основание которого круг $ABCD$, вершина же L , к «содержащейся» в нём пирамиде, основание которой многоугольник $ATBUCFDQ$, вершина же L , так и [тело] X к пирамиде, основание которой многоугольник $EOIPHRGS$, вершина же N . Упомянутый же конус больше «заключающейся» в нём пирамиды, ибо он объёмлет её, значит, и тело X больше пирамиды, основание которой многоугольник $EOIPHRGS$, вершина же N . Но оно «также» и меньше; это же невозможно. Значит, конус, основание которого круг $ABCD$, вершина же [точка] L к некоторому телу, меньшему конуса, основание которого круг $EIHG$, вершина же точка N , не будет иметь тройного отношения BD к IG . Подобным же вот образом докажем, что также и конус $EIHGN$ не будет иметь тройного отношения IG к BD к некоторому меньшему конуса $ABCDL$ «телу».

Вот я утверждаю, что конус $ABCDL$ не будет также иметь тройного отношения BD к IG к некоторому телу, большему конуса $EIHGN$.

Действительно, если возможно, то пусть он будет иметь его к большему X . Значит, обратно (предложение 7 книги V, следствие), тело X к конусу $ABCDL$ имеет тройное отношение IG к BD . Как же тело X к конусу $ABCDL$, так и конус $EIHGN$ к некоторому телу, меньшему конуса $ABCDL$ (предложение 2, лемма). И значит, конус $EIHGN$ к некоторому телу, меньшему конуса $ABCDL$, имеет тройное отношение IG к BD ; что же, как доказано, невозможно. Значит, конус $ABCDL$ не имеет тройного отношения BD к IG к некоторому телу, большему конуса $EIHGN$. Докажем же, что «он не имеет его» и к меньшему. Значит, конус $ABCDL$ к конусу $EIHGN$ имеет тройное отношение BD к IG .

Как же конус к конусу, так и цилиндр к цилиндру; ибо цилиндр, «находящийся» на том же основании, что и

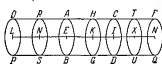
конус и равновысокий ему, будет втрое больше этого конуса (предложение 10). И значит, цилиндр к цилиндру имеет тройное отношение BD к IG .

Итак, подобные конусы и цилиндры будут друг к другу в тройном отношении диаметров оснований, что и требовалось доказать.

Предложение 13

Если цилиндр сечётся плоскостью, параллельной противоположным плоскостям, то будет, что как цилиндр к цилиндру, так и ось к оси.

Пусть цилиндр AD сечётся плоскостью HG , параллельной противоположным плоскостям AB , CD , и пусть плоскость HG встречается с осью в точке K ; я утверждаю, что будет как цилиндр BH к цилиндру HD , так и ось EK к оси KI (черт. 13).



Черт. 13.

Действительно, продолжим ось EI в обе стороны до точек L , M , отложим сколько-нибудь $\langle$ прямых $\rangle$ EN , NL , равных оси EK , и сколько-нибудь прямых IX , XM , равных IK , и вообразим на оси LM цилиндр OQ , основания которого круги OP , FQ . И через точки N , X проведём плоскости, параллельные $\langle$ как $\rangle$ AB , CD , $\langle$ так $\rangle$ и основаниям цилиндра OQ , и пусть они образуют круги RS , TU около центров N , X . И поскольку оси LN , NE , EK равны друг другу, то, значит, цилиндры PR , RB , BH , будут друг к другу, как основания (предложение 11). Основания же равны, равны значит, друг другу и цилиндры PR , RB , BH . Теперь, поскольку оси LN , NE , EK равны друг другу, также и цилиндры PR , RB , BH равны друг другу, и количество $\langle$ одних $\rangle$ равно количеству $\langle$ других $\rangle$, то, значит, сколько раз ось KL будет кратной оси EK , столько же раз и цилиндр PH будет кратным цилиндру HB . На том же вот основании и сколько раз ось MK будет кратной оси KI , столько же раз и цилиндр QH будет кратным цилиндру HD . И если ось KL равна оси KM , то и цилиндр PH будет

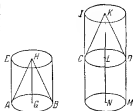
равен цилиндру HQ , если же <одна> ось больше <другой> оси, то и цилиндр будет больше цилиндра, и если меньше, то — меньше. Вот для четырёх имеющихся величин, <именно> осей EK , KI и цилиндров BH , HD , взяты равнократные — для оси EK и цилиндра BH — ось LK и цилиндр PH , для оси же KI и цилиндра HD — ось KM и цилиндр HQ , и доказано, что если ось KL превосходит ось KM , то и цилиндр PH превосходит HQ , и если равны, то — равны, и если меньше, то — меньше. Значит, будет, что как ось EK к оси KI , так и цилиндр BH к цилиндру HD (определение 5 книги V), что и требовалось доказать.

Предложение 14

Находящиеся на равных основаниях конусы и цилиндры будут друг к другу, как высоты.

Пусть на равных основаниях — кругах AB , CD — будут цилиндры EB , ID ; я утверждаю, что будет как цилиндр EB к цилиндру ID , так и ось HG к оси KL (черт 14).

Действительно, продолжим ось KL до точки N , отложим LN равной оси HG и вообразим на оси LN цилиндр CM . Теперь, поскольку цилиндры EB , CM находятся под той же самой высотой, то они будут друг к другу, как основания (предложение 11); основания же равны друг другу; значит, будут равны и цилиндры EB , CM . И поскольку цилиндр IM рассечён плоскостью CD , параллельной противоположным плоскостям, то, значит, будет, что как цилиндр CM к цилиндру ID , так и ось LN к оси KL (предложение 13). Цилиндр же CM равен цилиндру EB , ось же LN — оси HG ; значит, будет, что как цилиндр EB к цилиндру ID , так и ось HG к оси KL . Как же цилиндр EB к цилиндру ID , так и конус ABH к конусу CDK (предложение 10). И значит, как ось HG к оси KL , так и конус ABH к конусу CDK и цилиндр EB к цилиндру ID , что и требовалось доказать.

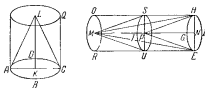


Черт. 14.

Предложение 15

У равных конусов и цилиндров основания обратно пропорциональны высотам; и у каких конусов и цилиндров основания обратно пропорциональны высотам, те будут равны.

Пусть будут равные конусы и цилиндры, основания которых круги $ABCD$, $EIHG$, диаметры же их AC , EH , оси же KL , MV , которые будут и высотами этих конусов и цилиндров, и дополним цилиндры AQ , EO . Я утверждаю, что у цилиндров AQ , EO основания обратно пропор-



Черт. 15.

циональны высотам, и будет как отношение $ABCD$ к основанию $EIHG$, так и высота MV к высоте KL (черт. 15).

Действительно, высота LK или будет равна высоте MN , или нет. Пусть сперва будет равна. Также и цилиндр AQ равен цилиндру EO . Находящиеся же под той же самой высотой конусы и цилиндры будут друг к другу, как основания (предложение 11); значит, и основание $ABCD$ равно основанию $EIHG$. Так что и обратно пропорционально — как основание $ABCD$ к основанию $EIHG$, так и высота MN к высоте KL .

Но вот пусть высота LK не будет равна MN , но пусть MV будет больше, и от высоты MN отнимем PN , равную KL , и через точку P плоскостью TCS , параллельной плоскости кругов $EIHG$, RO , рассечем цилиндр EO и воображим цилиндр ES на основании — круге $FIHG$ с высотой NP . И поскольку цилиндр AQ равен цилиндру EO , то, значит, будет — как цилиндр AQ к цилиндру ES , так и цилиндр EO к цилиндру ES (предложение 7 книги V). Но как цилиндр

AQ к цилиндру ES , так и основание $ABCD$ к $EIHG$, ибо цилиндры AQ , ES будут под той же самой высотой (предложение 11); как же цилиндр EO к ES , так и высота MV к высоте PN , ибо цилиндр EO рассечён плоскостью, являющейся параллельной противоположным плоскостям (предложение 13). Значит, будет, что и как основание $ABCD$ к основанию $EIHG$, так и высота MN к высоте PN . Высота же PN равна высоте KI ; значит, будет как основание $ABCD$ к основанию $EIHG$, так и высота MV к высоте KL . Значит, у цилиндров AQ , EO основания обратно пропорциональны высотам.

Но вот пусть у цилиндров AQ , EO основания обратно пропорциональны высотам, и пусть будет, что как основание $ABCD$ к основанию $EIHG$, так и высота MN к высоте KL ; я утверждаю, что цилиндр AQ будет равен цилиндру EO .

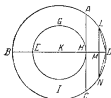
Действительно, после тех же самых построений, поскольку будет, что как основание $ABCD$ к основанию $EIHG$, так и высота MN к высоте KL , высота же KL равна высоте PV , то, значит, будет, что как основание $ABCD$ к основанию $EIHG$, так и высота MV к высоте PN . Но как основание $ABCD$ к основанию $EIHG$, так и цилиндр AQ к цилиндру ES , ибо они под той же самой высотой (предложение 11); как же высота MV к [высоте] PV , так и цилиндр EO к цилиндру ES (предложение 13); значит, будет, что как цилиндр AQ к цилиндру ES , так и цилиндр EO к ES . Значит, цилиндр AQ равен цилиндру EO (предложение 9 книги V). Таким же точно образом и относительно конусов, что и требовалось доказать (16, 17, 18, 19).

Предложение 16

При наличии двух кругов около того же самого центра вписать в больший круг равносторонний и четырёхсторонний многоугольник, не касающийся меньшего круга.

Пусть данные два круга будут $ABCD$, $EIHG$ около того же самого центра K ; нужно вот вписать в больший круг $ABCD$ равносторонний и четырёхсторонний многоугольник, не касающийся круга $EIHG$ (черт. 16).

Проведём через центр K прямую BKD и из точки H под прямыми (углами) к прямой BD проведём HA и доведём до C ; значит, AC касается круга $EIHG$ (предложение 16 книги III, следствие). Вот, разделив обвод BAI пополам и половину его пополам, и делая это постоянно, мы (когда-нибудь) получим в остатке обвод, меньший AD (предложение 1 книги X). Пусть он получен и будет LD ; из точки L проведём перпендикуляр LM на BD , доведём до N и соединим LD , DN ; значит, LD будет равна DN (предложение 3 книги III, предложение 4 книги I). И поскольку LN параллельна AC (предложение 28 книги I), AC же касается круга $EIHG$, то, значит,



Черт. 16.

LN не касается круга $EIHG$; значит, и подавно LD , DN не касаются круга $EIHG$. Вот, если будем в круг $ABCD$ вставлять одну за другой равные LD прямые (предложение 1 книги IV), то в круг $ABCD$ впишется равноугольный и чётносторонний многоугольник, не касающийся меньшего круга $EIHG$, что и требовалось сделать.

Предложение 17

При наличии двух сфер около того же самого центра вписать в большую сферу многогранное тело, не касающееся поверхности) меньшей сферы.*

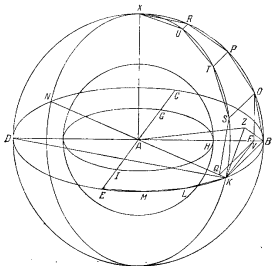
Вообразим две сферы около того же самого центра A ; вот требуется вписать в большую сферу многогранное тело, не касающееся поверхности меньшей сферы (черт. 17)**).

Пересечём эти сферы через центр какой-нибудь плоскостью; тогда эти сечения будут кругами, поскольку сфера получилась при неподвижности диаметра и вращении полукруга (определение 14 книги XI), так что и в каком бы

*) Буквально — «по поверхности»: *ἐπὶ τῇ ἐπιφανείᾳ*.

**) В дополнение к черт. 17 (имеющемуся в издании Гейсберга) мы даём более наглядный черт. 17 bis по изданию Хизса.

ние 16); пусть его стороны в квадранте*) BE будут BK , KL , LM , ME ; соединяющую KA доведём до N , из точки A под прямыми (углами) к плоскости круга $BCDE$ восставим перпендикуляр AX , и пусть он встречается с поверхностью сферы в X , и через эту AX и каждую из BD ,



Черт. 17 bis.

KN проведём плоскости; вог они согласно вышесказанному будут на поверхности сферы образовывать наибольшие круги. Пусть они образуют те, у которых полуокруги на диаметрах BD , KN будут BXD , KXN . И поскольку XA перпендикулярна к плоскости круга $BCDE$, то, значит, и все плоскости, проходящие через XA , будут перпендикулярны к пло-

*) то тѣ BE τετραπυρορίφ.

скости круга $BCDE$ (предложение 18 книги XI), так что и полуокруги BXD , KXN будут перпендикулярны к плоскости круга $BCDE$. И поскольку полуокруги BED , BXD , KXN равны (ибо они находятся на равных диаметрах BD , KN), то, значит, будут равны друг другу и квадранты BE , BX , KX . Значит, сколько сторон многоугольника будет в квадранте BE , столько же прямых, равных BK , KL , LM , ME будет и в квадрантах BX , KX . Впишем их и пусть они будут BO , OP , PR , RX , KS , ST , TU , UX ; соединим SO , TP , UR , и из $\langle$ точек $\rangle$ O , S проведём перпендикуляры на плоскость круга $BCDE$; вот они попадут на общие сечения BD , KN этих плоскостей $\langle$ с плоскостью круга $BCDE$ $\rangle$, поскольку ведь и плоскости $\langle$ полуокругов $\rangle$ BXD , KXN перпендикулярны к плоскости круга $BCDE$ (определение 4 книги XI). Пусть они попадут, и будут OF , SQ , и соединим QF . И поскольку в равных полуокругах BXD , KXN отложены равные $\langle$ дуги $\rangle$ BO , KS (предложение 28 книги III), и проведены перпендикуляры OF , SQ , то [значит] и OF равна SQ , BF же — KQ (предложение 27 книги III, предложение 26 книги I). Но также и вся BA равна всей KA ; значит, и остаток FA равен остатку QA ; значит, будет, что как BF к FA , так и KQ к QA ; значит, QF будет параллельна KB (предложение 2 книги VI). И поскольку каждая из OF , SQ перпендикулярна к плоскости круга $BCDE$, то, значит, OF будет параллельна SQ (предложение 6 книги XI). Доказано же, что она и равна ей; и значит, QF , SO будут равны и параллельны (предложение 33 книги I). И поскольку QF параллельна SO , но QF параллельна KB , то, значит, и SO будет параллельна KB (предложение 30 книги I). И соединяют их BO , KS ; значит, четырёхугольник $KBOS$ будет в одной плоскости, поскольку ведь если будут две параллельные прямые и на каждой из них взяты произвольные точки, то соединяющая эти точки прямая будет в той же самой плоскости, что и параллельные (предложение 7 книги XI). На том же вот основании и каждый из четырёхугольников $SOPT$, $TPRU$ будет находиться в одной плоскости. Так же и треугольник URX находится в одной плоскости (предложение 2 книги XI). Вот если вообразим из точек O , S , P , T , R , U соединяющие $\langle$ их $\rangle$ с A прямые,

то составит некоторая телесная многогранная фигура между окружностями BX , KX , составленная из пирамид, основания которых будут четырехугольники $KBOS$, $SOPT$, $TPRU$ и треугольник URX , вершина же в точке A . Если же мы и на каждой из сторон KL , LM , ME произведём те же самые построения, что и на BK , а затем и в остальных трёх квадрантах, то получится некоторая многогранная фигура, вписанная в сферу и состоящая из пирамид, основания которых будут упомянутые четырехугольники и треугольник URX , а также одинаково с ними расположенные*), вершина же в точке A .

Я утверждаю, что упомянутый многогранник не будет касаться меньшей сферы по поверхности, на которой находится круг IHQ .

Из точки A на плоскость четырехугольника $KBOS$ проведём перпендикуляр AZ , и пусть он встретится с этой плоскостью в точке Z ; соединим ZB , ZK . И поскольку AZ перпендикулярна к плоскости четырехугольника $KBOS$, то она, значит, будет перпендикулярна и ко всем касающимся её прямым, находящимся в плоскости четырехугольника (определение 3 книги XI). Значит, AZ будет перпендикулярна и к каждой из BZ , ZK . И поскольку AB равна AK , то и квадрат на AB равен квадрату на AK . И квадрату на AB равны квадраты на AZ , ZB (ибо $\angle$ при Z прямой), квадрату же на AK равны квадраты на AZ , ZK (предложение 47 книги I). Значит, квадраты на AZ , ZB будут равны квадратам на AZ , ZK . Отнимем общее — квадрат AZ ; значит, остаток — квадрат на BZ — будет равен остатку — квадрату на ZK ; значит, BZ равна ZK . Подобным же вот образом докажем, что и прямые, соединяющие Z с O и S , будут равны каждой из BZ , ZK . Значит, описанный из центра Z раствором одним из ZB , ZK круг пройдет и через O , S , и четырехугольник $KBOS$ будет в круге.

И поскольку KB больше QF , QF же равна SO , то, значит, KB больше SO . Но KB равна каждой из KS , BO ; значит, и каждая из KS , BO будет больше SO . И поскольку

*) та же самая фигура.

в круге будет четырёхугольник $KBOS$ и <прямые> KB , BO , KS равны, и OS меньше <их>, и BZ будет прямой из центра*) этого круга, то, значит, квадрат на KB будет более чем вдвое больше квадрата на BZ **). Проведём из K к BF перпендикуляр KV ***). И поскольку BD более чем вдвое меньше DV , и будет, что как BD к DV , так и <прямоугольник> между DB , BV к <прямоугольнику> между DV , VB , то, если построить на BV квадрат и дополнить прямоугольник****) на VD , то, значит, и <прямоугольник> между DB , BV будет менее чем вдвое больше <прямоугольника> между DV , VB . И при проведении соединяющей KD <прямоугольник> между DB , BV будет равен квадрату на BK , <прямоугольник> же между DV , VB равен квадрату на KV (предложение 31 книги III; предложение 8 книги VI, следствие); значит, квадрат на KB будет менее чем вдвое больше квадрата на KV . Но квадрат на KB более чем вдвое больше квадрата на BZ ; значит, квадрат на KV больше квадрата на BZ . И поскольку BA равна KA , то и квадрат на BA будет равен квадрату на KA . И квадрату на BA равны <вместе взятые> квадраты на BZ , ZA , квадрату же на KA равны <вместе взятые> квадраты на KV , VA (предложение 47 книги I); значит, квадраты на BZ , ZA будут равны квадратам на KV , VA , из которых квадрат на KV больше квадрата на BZ ; значит, остаток — квадрат на VA будет меньше квадрата на ZA . Значит, AZ больше AV ; значит, и подавно AZ больше AN . И AZ <перпендикуляр, опущенный> на одно из оснований многогранника, AN же — на поверхность меньшей сферы; так что

*) То-есть радиусом.

**) Ибо отдельные стороны KB , BO , KS будут больше стороны вписанного квадрата, которая равна $BZ \sqrt{2}$ (Гейбер).

***) Легко можно доказать, что этот перпендикуляр попадёт в самую точку F , и это имеет в виду исправление Теона, который ещё замещает V через F . Но тогда ему следовало бы доказать, что KF будет перпендикуляром. Евклид или не понял это, или, что я считаю более вероятным, не обратил на это внимания, так как это не имеет значения для сущности доказательства (Гейбер).

****) то параллелограмм.

многогранник не будет касаться меньшей сферы по поверхности*)

Итак, при наличии двух сфер около того же самого центра вписано в большую сферу многогранное тело, не касающееся поверхности меньшей сферы, что и требовалось сделать (20).

Следствие

Если же и в другую сферу вписано многогранное тело, подобное многогранному телу в сфере $BCDE$, то многогранное тело в сфере $BCDE$ к многогранному телу в другой сфере имеет тройное отношение диаметра сферы $BCDE$ к диаметру другой сферы. Действительно, если разделить эти тела на равночисленные и одинаково расположенные пирамиды, то эти пирамиды будут подобными. Подобные же пирамиды будут друг к другу в тройном отношении соответственных сторон (предложение 8. следствие); значит, пирамида, основание которой есть четырехугольник $KBOS$, вершина же точка A , имеет к одинаково расположенной пирамиде в другой сфере тройное отношение соответственной стороны к соответственной стороне, то-есть <прямой> AB из центра**) сферы с центром A к <прямой> из центра другой сферы. Точно так же и каждая пирамида из тех, что в сфере с центром A , к каждой одинаково расположенной пирамиде из тех, что в другой сфере, будет иметь тройное отношение <прямой> AB к <прямой> из центра другой сферы. И как один из предыдущих к одному из последующих, так и все предыдущие ко всем последующим (предложение 12 книги V); так что всё многогранное тело в сфере с центром A ко всему многогранному телу в другой [сфере] будет иметь тройное отношение <прямой> AB к <прямой> из центра другой сферы, то-есть диаметра AB к диаметру другой сферы, что и требовалось доказать.

*) Действительно, то же самое можно почти аналогично доказать и для остальных оснований рассматриваемого тела (Гейберг).

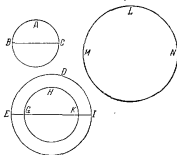
**) То-есть радиуса.

Предложение 18

Сферы находятся друг к другу в тройном отношении собственных диаметров.

Вообразим сферы ABC , DEI , и их диаметры BC , EI ; я утверждаю, что сфера ABC к сфере DEI имеет тройное отношение BC к EI (черт. 18).

Действительно, если сфера ABC к сфере DEI не имеет тройного отношения BC к EI , то сфера ABC будет иметь



Черт. 18.

тройное отношение BC к EI или к некоторой меньшей, чем сфера DEI , или же к большей. Пусть сперва она будет иметь к меньшей, именно к <сфере> HGK ; вообразим <сферу> DEI около того же самого центра, что и <сфера> HGK , и впишем в большую сферу DEI многогранное тело, не касающееся поверхности меньшей сферы HGK (предложение 17), впишем также и в сферу ABC многогранное тело, подобное многогранному телу в сфере DEI ; значит, многогранное тело в ABC к многогранному телу в DEI имеет тройное отношение BC к EI (предложение 17, следствие). Также и сфера ABC имеет к сфере HGK тройное отношение BC к EI ; значит, будет, что как сфера ABC к сфере HGK , так и многогранное тело в сфере ABC к многогранному телу в сфере DEI ; [значит], перестановкой (предло-

жение 16 книги V), как сфера ABC к многограннику в ней, так и сфера HGK к многогранному телу в сфере DEI . Сфера же ABC больше многогранника в ней; значит, и сфера HGK больше многогранника в сфере DEI (предложение 14 книги V). Но она и меньше; ибо она объемлется им. Значит, сфера ABC к меньшей, чем сфера DEI , не имеет тройного отношения диаметра BC к EI . Подобным же образом докажем, что и сфера DEI к меньшей, чем сфера ABC , не имеет тройного отношения EI к BC .

Вот я утверждаю, что сфера ABC и к некоторой большей, чем сфера DEI , не имеет тройного отношения BC к EI .

Действительно, если возможно, то пусть она имеет <его> к большей <сфере> LMN ; значит, обратно (предложение 7 книги V, следствие), сфера LMN к сфере ABC имеет тройное отношение диаметра EI к диаметру BC . Как же сфера LMN к сфере ABC , так и сфера DEI к некоторой меньшей, чем сфера ABC , поскольку ведь LMN больше DEI , как было доказано ранее (предложение 2, лемма). Значит, и сфера DEI к некоторой меньшей, чем сфера ABC , имеет тройное отношение EI к BC ; что, как доказано, невозможно. Значит, сфера ABC к некоторой большей, чем сфера DEI , не имеет тройного отношения BC к EI . Доказано же, что и не к меньшей. Значит, сфера ABC к сфере DEI имеет тройное отношение BC к EI , что и требовалось доказать (21, 22, 23).



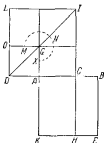
КНИГА ТРИНАДЦАТАЯ

Предложение 1

Если прямая линия разделена в крайнем и среднем отношении, то больший отрезок с присоединением половины всей <линии> в квадратах <будет равен> уняте- ренному *) квадрату на половине.

Пусть прямая линия AB разделена в крайнем и среднем отношении в точке C , и пусть больший отрезок будет AC ; по прямой с CA продолжим прямую AD и положим AD (равной) половине AB ; я утверждаю, что квадрат на CD будет утратенным квадратом на DA (теог. 1).

Черт. 1.

⁴Sept. 1.

* У Евклида очень сжатой: $\pi^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$ байт — пятикратно квантуется.

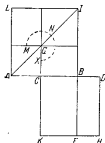
²⁴⁹) То же самое выражение, что в предложении 7 книги II (см. т. I, стр. 68).

AG . Как же <прямая> KA к AG , так и <прямоугольник> CK к CG (предложение 1 книги VI; значит, CK <будет> удвоенным CG . Также и LG , GC <будут вместе> удвоенным CG (предложение 43 книги I). Значит, KC равен LG , GC . Доказано же, что ещё CE равен GI ; значит, весь квадрат AE будет равен гномону MNX . И поскольку BA есть удвоенная AD , то квадрат на BA , т. е. AE , будет учетверенным квадратом на AD , <т. е.> DG . Но AE равен гномону MNX ; и значит, гномон MNX будет учетверённым AO ; значит, весь <квадрат> DI будет упятерённым AO . И DI есть квадрат на DC , AO же — квадрат на DA . Значит, квадрат на CD будет упятерённым квадратом на DA .

Итак, если прямая линия разделена в крайнем и среднем отношении, то больший отрезок с присоединением половины всей <линии> в квадратах <будет> равен упятерённому квадрату на половине, что и требовалось доказать.

Предложение 2

Если прямая линия в квадратах будет в пять раз больше своего отрезка, и если удвоенный упомянутый отрезок разделить в крайнем и среднем отношении, то оставшая часть первоначальной прямой будет большим отрезком.



Черт. 2.

Пусть прямая линия AB в квадратах будет в пять раз больше своего отрезка AC , и пусть CD будет удвоенной AC ; я утверждаю, что, если разделить CD в крайнем и среднем отношении, то CB будет большим отрезком (черт. 2).

Действительно, построим на каждой из AB , CD квадраты AI , CH , вычертаю в AI обычную фигуру и продолжим BE . И поскольку квадрат на BA есть упятерённый квадрат на AC , то <квадрат> AI будет упятерённым AG . Значит, гномон MNX будет учетверённым AG . И поскольку DC есть удвоенная CA , то, значит,

квадрат на DC , т. е. CH , будет учетверённым квадратом на CA , (т. е.) AG . Доказано же, что и гномон MNX есть упятерённый AG ; значит, гномон MNX будет равен (квадрату) CH . И поскольку DC есть удвоенная CA , и DC равна CK , AC же — CG [значит, и KC (есть) удвоенная CG], то, значит, и (прямоугольник) KB будет удвоенным BG . Также и LQ , GB (вместе) будут удвоенным GB ; значит, KB будет равен LQ , GB . Доказано же, что и весь гномон MNX равен всему (квадрату) CH ; значит, и остаток GI будет равен BH . И BH есть прямоугольник между CD , DB (ибо CD равна DH), GI же — квадрат на CB ; значит, прямоугольник между CD , DB будет равен квадрату на CB . Значит, будет, что как DC к CB , так CB к BD . Но DC больше CB (см. лемму); значит, и CB больше BD (предложение 14 книги V). Значит, при делении прямой CD в крайнем и среднем отношении большим отрезком будет CB .

Итак, если прямая линия в квадратах будет в пять раз больше своего отрезка, и если удвоенный упомянутый отрезок разделить в крайнем и среднем отношении, то оставшая часть первоначальной прямой будет большим отрезком, что и требовалось доказать.

Лемма *)

А что удвоенная AC будет больше BC , должно доказать так.

Действительно, если не так, то пусть, если возможно, будет BC удвоенной CA . Значит, квадрат на BC (есть) учетверённый квадрат на CA ; значит, квадраты на BC , CA (вместе) будут упятерённым квадратом на CA . Предполагается же, что и квадрат на BA будет упятерённым квадратом на CA ; значит, квадрат на BA будет равен квадратам на BC , CA ; это же невозможно (предложение 4 книги II). Значит, CB не будет удвоенной AC . Подобным же вот образом докажем, что и меньшая, чем CB , (прямая) не будет удвоенной CA ; ибо это ещё [более] нелепо.

Значит, удвоенная AC будет больше CB , что и требовалось доказать.

*) Подлинность этой леммы Гейберг считает весьма сомнительной.

Предложение 4

Если прямая линия разделена в крайнем и среднем отношении, то вместе взятые квадраты на целой и на меньшем отрезке будут в три раза больше квадрата на большем отрезке.

Пусть будет прямая AB и будет разделена в крайнем и среднем отношении в C , и пусть больший отрезок будет AC ; я утверждаю, что $\langle$ квадраты $\rangle$ на AP , BC будут в три раза больше $\langle$ квадрата $\rangle$ на CA (черт. 4).

Надстроим на AB квадрат $ADEB$ и вычертим обычную фигуру. Поскольку AB разделена в C в крайнем и среднем отношении, и больший отрезок есть AC , то, значит, $\langle$ прямоугольник $\rangle$ между AB , BC будет равен $\langle$ квадрату $\rangle$ на AC (определение 3 и предложение 17 книги VI). И $\langle$ прямоугольник $\rangle$ между AB , BC есть AK , $\langle$ квадрат $\rangle$ же на AC есть GH ; значит, AK равен GH . И поскольку AZ равен ZE (предложение 43 книги I), то прибавим общий CK ; значит, весь AK равен всему CE ; значит, AK , CE будут в два раза больше AK . Но AK , CE будут $\langle$ составлять $\rangle$ гномон LMN и квадрат CK ; значит, гномон LMN и квадрат CK будут в два раза больше AK . Но ведь доказано, что AK равен также GH ; значит, гномон LMN и $\langle$ квадрат CK в два раза больше GH ; так что гномон LMN и $\langle$ квадраты CK , GH будут в три раза больше квадрата GH . И гномон LMN и квадраты CK , GH будут $\langle$ составлять $\rangle$ весь $\langle$ квадрат $\rangle$ AE вместе с CK , которые являются $\langle$ квадратами $\rangle$ на AB , BC , а GH есть квадрат на AC . Итак, квадраты на AB , BC будут в три раза больше квадрата на AC , что и требовалось доказать.



Черт. 4.

Предложение 5

Если прямая линия разделена в крайнем и среднем отношении и к ней приставлена $\langle$ прямая $\rangle$, равная большему отрезку, то вся прямая уже разделяется в крайнем

и среднем отношении и большим отрезком будет первоначальная прямая.

Пусть прямая линия AB разделена в крайнем и среднем отношении в точке C , и пусть большим отрезком будет AC ; [отложим] AD равной AC . Я утверждаю, что прямая AB уже разделяется в A в крайнем и среднем отношении, и что большим отрезком будет первоначальная прямая AB (черт 5).

Действительно, надстроим на AB квадрат AE и вычертим обычную фигуру. Поскольку AB разделяется в C в крайнем и среднем отношении, то, значит, <прямоугольник> между AB , BC будет равен <квадрату> на AC (определение 3 и предложение 17 книги VI). И <прямоугольник> между AB , BC есть CE , <квадрат> же на AC <есть> CG ; значит, CE равен GC . Но <прямоугольнику> CE равен GE (предложение 43 книги I), GC же равен DG ; значит, и DG будет равен GE ; [прибавим общий GB]. Значит, весь DK будет равен всему AE . И DK есть <прямоугольник> между BD , DA (ибо AD равна DL), AE же <квадрат> на AB ; значит, <прямоугольник> между BD , DA будет равен <квадрату> на AB . Значит, будет, что как DB к BA , так и BA к AD (предложение 17 книги VI). Но DB больше BA ; значит, и BA больше AD (предложение 14 книги V).

Итак, DB разделяется в A в крайнем и среднем отношении, и большим отрезком будет AB , что и требовалось доказать (1, 2, 3, 4, 5, 6).

Предложение 6

Если рациональная прямая разделена в крайнем и среднем отношении, то каждый из отрезков будет иррациональным — так называемым вычетом.

Пусть будет рациональная прямая AB , и пусть она разделена в C в крайнем и среднем отношении, и наибольший отрезок пусть будет AC ; я утверждаю, что каж-

дая из AC , CB будет иррациональной — так называемым вычетом (черт. 6).

Действительно, продолжим BA и отложим AD — половину BA . Теперь, поскольку прямая AB разделена в C в крайнем и среднем отношении и к большему отрезку AC прилежит AD , являющаяся половиной AB , то, значит, «квадрат» на CD будет в пять раз больше «квадрата» на DA (предложение 1). Значит, «квадрат» на CD имеет к «квадрату» на DA отношение, как число к числу; значит, «квадрат» на CD будет соизмерим с «квадратом» на DA (предложение 6 книги X). «Квадрат» же на DA рационален, ибо рациональной [будет]

DA , являющаяся половиной AB , «тоже» рациональной; значит, рационален и «квадрат» на CD (определение 9 книги X); значит, рациональной будет и CD . И поскольку «квадрат» на CD к «квадрату» на DA не имеет отношения, как квадратное число к квадратному числу, то, значит, CD будет линейно несоизмерима с DA (определение 9 книги X); значит, CD , DA будут рациональными, соизмеримыми только в степени; значит, AC будет вычетом (предложение 73 книги X). Затем, поскольку AB разделена в крайнем и среднем отношении и наибольший отрезок есть AC , то, значит, «прямоугольник» между AB , BC будет равен «квадрату» на AC (определение 3 и предложение 17 книги X). Значит, «квадрат» на вычете AC , приложенный к рациональной AB , образует шириной BC .

«Квадрат» же на вычете, приложенный к рациональной, образует шириной первый вычет (предложение 97 книги X); значит, CB будет первым вычетом. Доказано же, что и CA вычет.

Итак, если рациональная прямая разделена в крайнем и среднем отношении, то каждый из отрезков будет иррациональным — так называемым вычетом, что и требовалось доказать.

Предложение 7

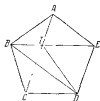
Если у равностороннего пятиугольника будут равны по три смежных или же не смежных угла, то пятиугольник будет равноугольным.



Черт. 6.

Пусть у равностороннего пятиугольника $ABCDE$ будут равны друг другу три угла — в первую очередь смежных, которые при A, B, C ; я утверждаю, что пятиугольник $ABCDE$ будет равноугольным (черт. 7).

Действительно, соединим AC, BE, ID . И поскольку две <стороны> CB, BA равны двум BA, AE — каждая каждой — и угол CBA равен углу BAE , то, значит, основание AC будет равно основанию BE , и треугольник ABC равен треугольнику AEB , и остальные углы будут равны остальным углам, которые стягиваются равными сторонами (предложение 4 книги I), именно угол BCA углу BEA , угол же AIE углу CAB ; так что и сторона AI будет равна стороне BI (предложение 6 книги I). Доказано же, что и вся AC равна всей BE ; значит, и остаток IC будет равен остатку IE . Также и CD равна DE . Вот две <прямые> IC, CD равны двум IE, ED ; и у них общее основание ID ; значит, угол ICD будет равен углу IED (предложение 8



Черт. 7

книги II. Доказано же, что угол BCA равен углу AEB ; значит, и весь угол BCD равен всему углу AED . Но углы BCD предпологается равным углам при A, B ; значит, и угол AED будет равен углам при A, B . Подобным же вот образом докажем, что и угол CDE будет равен углам при A, B, C ; значит, пятиугольник $ABCDE$ будет равноугольным.

Но вот пусть будут равны не смежные углы, но углы при точках A, C, D ; я утверждаю, что и так пятиугольник $ABCDE$ будет равноугольным.

Действительно, соединим BD . И поскольку две <стороны> BA, AE равны двум BC, CD и заключают равные углы, то, значит, основание BE будет равно основанию BD и треугольник AEB будет равен треугольнику BCD , и остальные углы будут равны остальным углам, стягиваемым равными сторонами (предложение 4 книги I); значит, угол AEB будет равен CDB . Также и угол BED будет равен BDE , поскольку и сторона BE равна стороне BD (предло-

жение 6 книги I). Значит, и весь угол AED будет равен всему $\langle$ углу $\rangle CDE$. Но CDE предполагается равным углом при A , C ; значит, и угол AED будет равным $\langle$ углам $\rangle$ при A , C . На основании вот того же и ABC будет равен углам при A , C , D . Значит, пятиугольник $ABCDE$ будет равноугольным, что и требовалось доказать.

Предложение 8

Если у равностороннего и равноугольного пятиугольника прямые стягивают два смежных угла, то они делят друг друга в крайнем и среднем отношении и большие их отрезки равны стороне пятиугольника

Пусть у равностороннего и равноугольного пятиугольника $ABCDE$ прямые AC , BE стягивают два смежных угла A , B , пересекая друг друга в точке G ; я утверждаю, что каждая из них разделена в точке G в крайнем и среднем отношении, и большие их отрезки равны стороне пятиугольника (черт. 8).



Черт. 8.

Действительно, опишем около пятиугольника $ABCDE$ круг $ABCDE$ (предложение 14 книги IV). И поскольку две прямые EA , AB равны двум AB , BC и заключают равные углы, то, значит, основание BE равно основанию AC , и треугольник ABE равен треугольнику ABC , и остальные углы будут равны остальным — каждый каждому, — которые стягиваются равными сторонами (предложение 4 книги I). Значит, угол BAC будет равен ABE ; значит, $\langle$ угол $\rangle AGR$ вдвое больше BAG (предложение 32 книги I); также и EAC вдвое больше BAC , поскольку и обвод EDC вдвое больше обвода CB (предложение 28 книги III; предложение 33 книги VI); значит, угол GAE равен AGE ; так что и прямая GE будет равна EA , то-есть AB (предложение 6 книги I). И поскольку прямая BA равна AE , то и угол ABE будет равен AEB (предложение 5 книги I). Но $\langle$ угол $\rangle ABE$, как доказано, равен BAG ; значит, и BEA будет

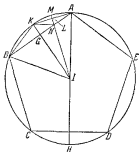
И поскольку прямая EC равна CD (ибо каждая из них равна стороне шестиугольника, [вписанного] в круг ABC) (предложение 15 книги IV, следствие), то и угол CED равен углу CDE ; значит, угол ECB вдвое больше EDC (предложение 32 книги I). Но доказано, что AEC вдвое больше ECB ; значит, AEC в четыре раза больше EDC . Доказано же, что AEC в четыре раза больше и BEC ; значит, EDC равен BEC . У двух же треугольников BEC и BED угол EBD общий, и, значит, остающийся (угол) BED будет равен ECB (предложение 32 книги I); значит, треугольник EBD равноуглен с треугольником EBC . Значит, будет пропорция (предложение 4 книги VI) — как DB к BE , так и EB к BC . Но EB равна CD . Значит, будет как BD к DC , так и DC к CB . Но BD больше DC ; значит, и DC больше CB (предложение 14 книги V). Значит, прямая BD разделена [в G] в крайнем и среднем отношении, и больший её отрезок есть DC , что и требовалось доказать.

Предложение 10

Если в круг вписан равносторонний пятиугольник, то сторона пятиугольника в квадратах равна (стороне) шестиугольника (вместе со стороной) десятиугольника, вписанных в тот же самый круг.

Пусть будет круг $ABCDE$, и пусть в круг $ABCDE$ будет вписан равносторонний пятиугольник $ABCDE$. Я утверждаю, что сторона пятиугольника $ABCDE$ в квадратах равна (стороне) шестиугольника (вместе со стороной) десятиугольника, вписанных в круг $ABCDE$ (черт. 10).

Действительно, возьмём центр круга — точку I и соединяющую AJ доведём до точки H , соединим IB , из I проведём к AB перпендикуляр IO и дове-



Черт. 10

дём <его> до K ; соединим AK , $KВ$ и опять из I проведём к AK перпендикуляр IL , доведём до M и соединим KN . Поскольку обвод $ABCH$ равен обводу $AEDH$ и у них ABC равен AED , то, значит, остающийся обвод CH будет равен остающемуся HD . Но CD — <дуга> пятиугольника; значит, CH — десятиугольника. И поскольку IA равна IB , и IG перпендикуляр, то, значит, и угол AIK равен KIB (предложение 5 и 26 книги I). Так что и обвод AK равен $KВ$ (предложение 26 книги III); значит, обвод AB вдвое больше обвода BK ; значит, прямая AK будет стороной десятиугольника. На том же вот основании и AK будет вдвое больше $KМ$. И поскольку обвод AB вдвое больше обвода BK , обвод же CD равен обводу AB , то, значит, и обвод CD вдвое больше обвода BK . Обвод же CD вдвое больше и CH ; значит, обвод CH равен обводу BK . Но BK , как и KA , вдвое больше $KМ$; значит, и CH вдвое больше $KМ$. Но и обвод CB вдвое больше обвода BK ; ибо обвод CB равен BA . Значит, и весь обвод HB будет вдвое больше BM ; так что и угол HIB [будет] вдвое больше угла BIM (предложение 33 книги VI). Но HIB вдвое больше и IAB , ибо IAB равен ABI . И значит, BIN будет равен IAB . У двух же треугольников, ABI и BIN , угол ABI общий; значит, и остающийся AIB равен остающемуся BNI (предложение 32 книги I); значит, треугольник ABI будет равноуголен с треугольником BIN . Значит (предложение 4 книги VI), будет пропорция — как прямая AB к BI , так и IB к BN ; значит, <прямоугольник> между AB , BN будет равен <квадрату> на BI (предложение 17 книги VI). Затем, поскольку AL равна LK , а IN общая и под прямыми углами, то, значит, основание KN будет равно основанию AN ; и угол LKN будет равен углу LAN (предложение 4 книги I). Но LAN равен KBV (предложение 29 книги III; предложение 5 книги I; значит, и LKN будет равен KBV . И у двух треугольников — AKB и AKN — угол при A общий. Значит, остающийся <угол> AKB будет равен остающемуся KNA (предложение 32 книги I); значит, треугольник KBA будет равноугольным с треугольником KNA . Значит, будет пропорция (предложение 4 книги VI) как прямая BA к AK , так и KA к AN ; значит, <прямоугольник> между BA , AN

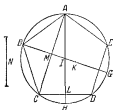
будет равен «квадрату» на AK (предложение 17 книги VI). Доказано же, что и «прямоугольник» между AB , BN равен «квадрату» на BI ; значит, «прямоугольник» между AB , BN , вместе с «прямоугольником» между BA , AN , что составляет «квадрат» на BA , будут равны «квадрату» на BI вместе с «квадратом» на AK (предложение 2 книги II). И BA есть сторона пятиугольника, BI же — шестиугольника, AK же — десятиугольника.

Итак, сторона пятиугольника в квадратах равна «стороне» шестиугольника и «стороне» десятиугольника, вписанных в тот же самый круг, что и требовалось доказать.

Предложение 11

Если в круг, имеющий рациональный диаметр, вписывается равносторонний пятиугольник, то сторона пятиугольника будет иррациональной — так называемой «меньшей».

Пусть в круг $ABCDE$, имеющий рациональный диаметр, будет вписан равносторонний пятиугольник $ABCDE$; я утверждаю, что сторона пятиугольника $[ABCDE]$ будет иррациональной — так называемой «меньшей» (черт. 11).



Черт. 11.

Действительно, возьмём центр круга — точку I , соединим AI , IB и доведём до точек H , G ; соединим AC и отложим IK — четвертую часть AI . Но AI рациональна; значит, будет рациональной и IK . Также и BI рациональна; значит, вся BK будет рациональной. И поскольку обвод ACH равен обводу ADH , у которых ABC равен AED , то и остаток CH будет равен остатку HD . И если мы соединим AD , то получатся*) углы при L прямые и CD , вдвое большая CL (предложение 4 книги I). На основании вот того же и углы при M будут прямыми и AC вдвое большей CM . Теперь, поскольку

*) συγκροταται — буквально «собирается», «собираются». У Евклида такое выражение встречается в первый раз.

угол ALC равен AMI , $\langle$ угол $\rangle$ же LAC общий у двух треугольников ACL и AMI , то, значит, остающийся $\langle$ угол $\rangle$ ACL будет равен остающемуся MIA (предложение 32 книги I); значит, треугольник ACL будет равноугольным с треугольником AMI ; значит (предложение 4 книги VI) будет пропорция — как LC к CA , так и MI к IA ; и удвоив предыдущие, — как удвоенная LC к CA , так и удвоенная MI к IA . Как же удвоенная MI к IA , так и MI к половине IA ; и значит, как удвоенная LC к CA , так и MI к половине IA . И $\langle$ взяв $\rangle$ половины последующих, — как удвоенная LC к половине CA , так и MI к четверти IA . И удвоенная LC есть DC , половина же CA $\langle$ есть $\rangle$ CM , четвертая же часть IA $\langle$ есть $\rangle$ IK ; значит, будет, что как DC к CM , так и MI к IK . И «присоединяя» (предложение 18 книги VI, — как вместе взятые DC , CM^*) к CM , так и MK к KI ; и значит, как $\langle$ квадрат $\rangle$ на вместе взятых DC и CM к $\langle$ квадрату $\rangle$ на CM , так и $\langle$ квадрат $\rangle$ на MK к $\langle$ квадрату $\rangle$ на KI . И поскольку у прямой, стягивающей две стороны пятиугольника, как, например, AC , и делящейся в крайнем и среднем отношении, больший отрезок будет равен стороне пятиугольника (предложение 8), то есть DC , больший же отрезок с присоединением половины всей будет в квадратах в пять раз больше $\langle$ квадрата $\rangle$ на половине всей (предложение 1), и половина всей AC будет CM , то, значит, $\langle$ квадрат $\rangle$ на DC , CM , как одной $\langle$ прямой $\rangle$, будет в пять раз больше $\langle$ квадрата $\rangle$ на CM . Как же $\langle$ квадрат $\rangle$ на DC , CM , как одной $\langle$ прямой $\rangle$ к $\langle$ квадрату $\rangle$ на CM , так, по доказанному, и $\langle$ квадрат $\rangle$ на MK к $\langle$ квадрату $\rangle$ на KI ; значит, $\langle$ квадрат $\rangle$ на MK будет в пять раз больше $\langle$ квадрата $\rangle$ на KI . Квадрат же на KI рационален, ибо рационален диаметр; значит, и $\langle$ квадрат $\rangle$ на MK рационален; значит, рациональной будет и MK [но только в степени]. И поскольку BI в четыре раза больше IK , то, значит, BK будет в пять раз больше KI ; значит, $\langle$ квадрат $\rangle$ на BK будет в двадцать пять раз больше $\langle$ квадрата $\rangle$ на KI . $\langle$ Квадрат $\rangle$ же на MK в пять раз больше $\langle$ квадрата $\rangle$ на KI ; значит, $\langle$ квадрат $\rangle$ на BK в

* Евклид пишет просто «συνεπληροσθησιν» — первый пример такого обозначения для суммы.

пять раз больше <квадрата> на KM ; значит, <квадрат> на BK к <квадрату> на KM не имеет отношения, как квадратное число к квадратному числу; значит, BK будет линейно*) несоизмерима с KM . И каждая из них рациональна. Значит, BK , KM будут рациональными, соизмеримыми только в степени. Если же от рациональной отнимается рациональная, являющаяся только в степени соизмеримой с целой, то остаток будет иррациональной <именно> вычетом; значит, MB будет вычетом, MK же — с ним сочетающийся (определение 73 книги X). Вот я утверждаю, что < MB будет> и четвёртым <вычетом>. Чем <квадрат> на BK больше будет <квадрата> на KM , пусть вот этому будет равен <квадрат> на N ; значит, BK в квадратах будет на N более KM . И поскольку KI соизмерима с IB , то и «присоединяя» — KB будет соизмерима с IB . Но BI соизмерима с BO ; значит, и BK будет соизмерима с BO . И поскольку <квадрат> на BK в пять раз больше <квадрата> на KM , то, значит, <квадрат> на BK к <квадрату> на KM имеет отношение, как 5 к одному. Значит, «переворачивая» (предложение 19 книги V, следствие), <квадрат> на BK к <квадрату> на N имеет отношение, как 5 к 4, не являющееся <отношением> квадрата к квадрату; значит, BK будет несоизмеримой с N (предложение 9 книги X); значит, BK будет в квадратах больше KM на несоизмеримую с ней <прямую>. Теперь, поскольку вся BK в квадратах будет больше сочетающейся KM на несоизмеримую с собой, и вся BK соизмерима с отложенной рациональной BO , то, значит, MB будет четвёртым вычетом (определение 4 книги X). Прямоугольник**, же, заключающийся между рациональной и четвёртым вычетом, иррационален, и quadriрующая его будет иррациональной; называется же ота «меньшей» (предложение 94 книги X). <Прямоугольник> же между GB , BM quadriруется <прямой> AB на том основании, что после <проведения> соединяющей AO треугольник ABO делается равноугольным треугольнику ABM (предложение 8 книги VI) и будет,

*) У Евклида $\rho\eta\mu\alpha$.**) У Евклида $\sigma\rho\delta\omega\upsilon\sigma\mu\epsilon\kappa\alpha$.

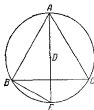
что как GB к BA , так и AB к BM (предложение 4 книги VI*).

Итак, AB — сторона пятиугольника — будет иррациональной, так называемой «меньшей», что требовалось доказать.

Предложение 12

*Если в круг вписывается равносторонний треугольник, то сторона этого треугольника в степени в три раза больше <прямой> из центра**> <в> круге.*

Пусть будет круг ABC , и пусть в него вписан равносторонний треугольник ABC ; я утверждаю, что одна сторона треугольника ABC в степени в три раза больше <прямой> из центра <в> круге ABC (черт. 12).



Черт. 12.

Действительно, возьмём центр D круга ABC , соединяющую AD доведём до E и соединим BE . И поскольку треугольник ABC равносторонний, то, значит, обвод BEC будет третьей частью <всего> обвода круга ABC . Значит, обвод BE будет шестой частью обвода круга; значит, прямая BE будет <стороной> шестиугольника; значит,

она будет равна <прямой> из центра DE (предложение 15 книги IV, следствие). И поскольку AE вдвое больше DE , то, значит, <квадрат> на AE будет в четыре раза больше <квадрата> на ED , то-есть <квадрата> на BE . <Квадрат> же на AE равен <квадратам> на AB , BE (предложение 47 книги I; предложение 31 книги III); значит, <квадраты> на AB , BE будут в четыре раза больше <квадрата> на BE . Значит, <выделяя>***), <квадрат> на AB будет в три раза больше <квадрата> на BE . Но BE равна DE ; значит, <квадрат> на AB будет в три раза больше <квадрата> на DE .

* По существу это уже доказано и притом одинаковым образом в лемме после предложения 32 книги X. Это показывает, что вряд ли последняя лемма принадлежит Евклиду.

**> *ἐκ τοῦ κέντρου*, т. е. радиуса.

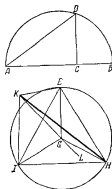
***> У Евклида *ἀποκρίνεται*.

Итак, сторона этого треугольника в степени в три раза больше <прямой> из центра [в круге], что и требовалось доказать (7).

Предложение 13

Составить пирамиду, охватить её заданной сферой и показать, что диаметр сферы будет в квадратах в полтора раза больше стороны пирамиды.

Отложим AB — диаметр заданной сферы — и разделим его в точке C так, чтобы AC была вдвое больше CB (предложение 10 книги VI); и опишем на AB полукруг ADB , из точки C проведём CD под прямыми <углами> к AB и соединим DA ; и отложим круг $E\Gamma H$, имеющий <прямую> из центра равной DC и впишем в круг $E\Gamma H$ равносторонний треугольник $E\Gamma H$ (предложение 2 книги IV); и возьмём центр круга — точку G , и соединим EG , GI , GH ; и из точки G восставим GK под прямыми <углами> к плоскости круга $E\Gamma H$, и на GK отсечём GK , равную прямой AC *), и соединим KE , KI , KH (черт. 13). И поскольку KG перпендикулярна к плоскости круга $E\Gamma H$, то она образует прямые углы со всеми прямыми, касающимися её и находящимися в плоскости круга $E\Gamma H$ (определение 3 книги XI). Касаются же её каждая из GE , GI , GH ; значит, GK будет перпендикулярна к каждой из GE , GI , GH . И поскольку AC равна GK , а CD <равна> GE , и они заключают прямые углы, то, значит, основание DA будет равно основанию KE (предложение 4 книги I). На основания того же вот и каждая из KI , KH будет равна DA ; значит, три <прямые> KE , KI ,



Черт. 13.

* *ἀφ' ἑαυτῆς ἀπὸ τῆς GK τῆς ΑΓ εὐθείας ἐκ τῆς GK* — буквально, отнимем от GK равную прямой AC <линию> GK .

KH будут равны друг другу. И поскольку AC вдвое больше CB , то, значит, AB будет вдвое больше BC . Как же AB к BC , так и «квадрат» на AD к «квадрату» на DC , как будет доказано дальше (см. лемму). Значит, «квадрат» на AD вдвое больше «квадрата» на DC . Но также и «квадрат» на IE вдвое больше «квадрата» на EG (предложение 12) и DC равна EG ; значит, и DA будет равна EI . Но DA , как доказано, равна каждой из KE , KI , KH ; и значит, каждая из EI , IH , HE будет равна каждой из KE , KI , KH ; значит, четыре треугольника EIH , KEI , KIH , KEN будут равносторонними. Итак, из четырёх равносторонних треугольников составляется пирамида, основанием которой будет треугольник EIH , вершиной же точка K .

Вот требуется также охватить её заданной сферой и показать, что диаметр сферы будет в квадратах в полтора раза больше стороны пирамиды.

Действительно, продолжим «по прямой» с KQ прямую QL и отложим QL , равную CB . И поскольку будет как AC к CD , так и CD к CB (предложение 8 книги VI, следствие), AC же равна KQ , CD же — GE , и CB «равна» GL , то, значит, будет, что как Q к OE , так и EG к OL ; значит, «прямоугольник» между KQ , GL равен «квадрату» на FG (предложение 17 книги VI). И каждый из углов QOE , EGL прямой; значит, описанный на KL полукруг пройдёт и через E [поскольку, если соединим EL , то угол LEK окажется прямым вследствие того, что треугольник EIK окажется равноугольным с каждым из треугольников ELQ , FOK]. Если же при неподвижной KL полукруг, обходясь, опять вернётся туда же, откуда он начал двигаться, то он пройдёт и через точки I , H , если соединить IL , IH , причём каждый из углов при I , H точно так же окажется прямым и пирамида будет охвачена заданной сферой. Действительно, диаметр KL сферы будет равен диаметру AB заданной сферы, поскольку KQ отложена равной AC , а GL «равной» CB .

Вот я утверждаю, что диаметр сферы будет в квадратах в полтора раза больше стороны пирамиды.

Действительно, поскольку AC вдвое больше CB , то, значит, AB будет вдвое больше BC ; значит, «переворачивая», BA будет в полтора раза больше AC . Как же BA

к AC , так и $\langle \text{квадрат} \rangle$ на BA к $\langle \text{квадрату} \rangle$ на AD [поскольку после соединения DB будет, что как BA к AD , так и DA к AC вследствие подобия треугольников DAB , DAC и того, что как первая к третьей, так и $\langle \text{квадрат} \rangle$ на первой к $\langle \text{квадрату} \rangle$ на второй]. Значит, $\langle \text{квадрат} \rangle$ на BA в полтора раза больше $\langle \text{квадрата} \rangle$ на AD . И BA есть диаметр заанной сферы, AD же — одна сторона пирамиды.

Итак, диаметр сферы будет $\langle \text{в квадратах} \rangle$ в полтора раза больше стороны пирамиды, что и требовалось доказать.

Л е м м а

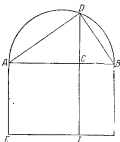
Показать, что как AB к BC , так будет и $\langle \text{квадрат} \rangle$ на AD к $\langle \text{квадрату} \rangle$ на DC .

Действительно, возьмём чьё-ж полуокруга, соединим DB , начертим на AC квадрат EC и дополним параллелограмм IB (черт. 14).

Теперь, поскольку вследствие равноугольности треугольника DAB с треугольником DAC будет, что как BA к AD , так и DA к AC , то, значит, $\langle \text{прямоугольник} \rangle$ между BA , AC будет равен $\langle \text{квадрату} \rangle$ на AD (предложение 17 книги VI). И поскольку как $\langle \text{прямая} \rangle AB$ к BC , так и $\langle \text{площадь} \rangle EB$ к BI , и $\langle \text{площадь} \rangle EB$ есть $\langle \text{прямоугольник} \rangle$ между BA , AC (ибо EA равна AC), BI же $\langle \text{прямоугольник} \rangle$ между AC , CB .

И то, значит, как AB к BC , так и $\langle \text{прямоугольник} \rangle$ между BA , AC

к $\langle \text{прямоугольнику} \rangle$ между AC , CB . И $\langle \text{прямоугольник} \rangle$ между BA , AC равен $\langle \text{квадрату} \rangle$ на AD , $\langle \text{прямоугольник} \rangle$ же между AC , CB равен $\langle \text{квадрату} \rangle$ на DC ; ибо перпендикуляр DC будет средней пропорциональной между отрезками AC , CB основания (предложение 8 книги VI, следствие) вследствие того, что угол ADB прямой (предложение 31 книги III). Итак, как AB к BC , так и $\langle \text{квадрат} \rangle$ на AD к $\langle \text{квадрату} \rangle$ на DC , что и требовалось доказать.

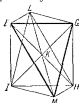


Черт. 14

Предложение 14

Составить октаэдр, охватить его сферой, как и выше, и показать, что диаметр сферы будет в квадратах вдвое больше стороны октаэдра.

Отложим диаметр AB заданной сферы, разделим $\langle$ его $\rangle$ пополам в C , опишем на AB полуокруг ADB , из C под прямым $\langle$ углом $\rangle$ к AB проведём CD и соединим DB ;



Черт. 1а

возьмём квадрат $EIHG$, имеющий каждую из сторон равной DB , соединим GI , EH , из точки K под прямым $\langle$ углом $\rangle$ к плоскости квадрата $EIHG$ восставим прямую KL , продолжим её по другую сторону плоскости в виде KM , на каждой из KL , KM отсечём прямые KL , KM , равные одной из EK , IK , HK , OK , и соединим LE , LI , LH , LG , ME , MI , MH , MG (черт. 15). И поскольку KE равна KO и угол EKO прямой, то, значит, $\langle$ квадрат $\rangle$ на GE будет вдвое больше $\langle$ квадрата $\rangle$ на EK (предложение 47 книги I). Далее, поскольку LK равна KE и угол LKE прямой, то, значит, $\langle$ квадрат $\rangle$ на EL будет

вдвое больше $\langle$ квадрата $\rangle$ на EK (там же). Доказано же, что и $\langle$ квадрат $\rangle$ на GE вдвое больше $\langle$ квадрата $\rangle$ на EK ; значит, $\langle$ квадрат $\rangle$ на LE будет равен $\langle$ квадрату $\rangle$ на EG ; значит, LE будет равна EG . На основании того же вот и LG будет равна GE ; значит, треугольник LEG будет равнобедренным. Подобным же вот образом докажем, что будет равнобедренным и каждый из остальных треугольников, основаниями которых являются стороны квадрата $EIHG$, вершинами же точки L , M ; значит, составляется октаэдр, заключающийся между восемью равнобедренными треугольниками.

Вот требуется также охватить его заданной сферой и показать, что диаметр этой сферы будет в квадратах вдвое больше стороны октаэдра.

Действительно, поскольку три LK , KM , KE равны друг другу, то, значит, описанный на LM полукруг пройдёт и через E . И вследствие того же самого, если при неподвижной LM полукруг, обращаясь, вернётся туда же, откуда он начал двигаться, то он пройдёт и через точки I , H , G , и получится октаэдр, охваченный сферой. Вот я утверждаю, что и данной. Действительно, поскольку LK равна KM , KE же общая, и они заключают прямые углы, то, значит, основание LE будет равно основанию EM (предложение 4 книги I). И поскольку угол LEM прямой (ибо он в полукруге) (предложение 31 книги III), то, значит, <квадрат> на LM будет вдвое больше <квадрата> на LE (предложение 47 книги I). Далее, поскольку AC равна CB , то AB будет удвоенной BC . Как же AB к BC , так и <квадрат> на AB к <квадрату> на BC (предложение 8 книги VI, определение 9 книги V); значит, <квадрат> на AB вдвое больше <квадрата> на BC . Доказано же, что и <квадрат> на LM вдвое больше <квадрата> на LE . И <квадрат> на DB равен <квадрату> на LE ; ибо EG полагается равной DB . Значит, и <квадрат> на AB равен <квадрату> на LM ; значит, AB равна LM . И AB есть диаметр заданной сферы; значит, LM будет равна диаметру заданной сферы.

Итак, октаэдр охвачен заданной сферой, и вместе с тем доказано, что диаметр этой сферы будет в квадратах вдвое больше стороны октаэдра, что и требовалось доказать.

Предложение 15

Составить куб, охватить его сферой, как и пирамиду, и показать, что диаметр сферы будет в квадратах в три раза больше стороны куба.

Отложим диаметр AB заданной сферы, разделим его в C так, чтобы AC была бы вдвое больше CB , опишем на AB полукруг ADB , из C под прямыми <углами> к AB проведём CD и соединим DB ; возьмём квадрат $EIHG$, имеющий сторону равной DB , из E , I , H , G под прямыми <углами> к плоскости квадрата $EIHG$ проведём EK , IL , HM , GN , отсечём на каждой из EK , IL , HM , GN прямые EK , IL , HM , GN , равные одной из EI , IH , HG ,

GE , и соединим KL , LM , MN , NK (черт. 16); значит, составляется куб IN , заключённый между шестью равными квадратами. Вот и нужно охватить его заданной сферой и показать, что диаметр этой сферы в квадратах будет в три раза больше стороны куба.

Действительно, соединим KH , EH . И поскольку угол KEN прямой вследствие того, что и $\langle$ прямая $\rangle$ KE перпендикулярна к плоскости EH и, конечно, к прямой EH (определение 3 книги XI), то, значит, опи-



Черт. 16.

санный на KH полукруг пройдёт и через точку E . Далее, поскольку HI перпендикулярна к каждой из IL , IE , то, значит, HI будет перпендикулярна и к плоскости IK (предложение 4 книги XI); так что и если мы соединим IK , то HI будет перпендикулярна и к IK ; и вследствие этого опять описанный на HK полукруг пройдёт и через I . Подобным же образом он пройдёт и через остальные точки куба. $\langle$ И $\rangle$ вот, если при неподвижной KH полукруг, обращаясь, вернётся туда же, откуда начал двигаться, то получится куб, охваченный

сферой. Вот я утверждаю, что и данной. Действительно, поскольку HI равна IE и угол при I прямой, то, значит, $\langle$ квадрат $\rangle$ на EH будет вдвое больше $\langle$ квадрата $\rangle$ на EI (предложение 47 книги I). Но EI равна EK ; значит, $\langle$ квадрат $\rangle$ на EI будет вдвое больше $\langle$ квадрата $\rangle$ на EK ; так что $\langle$ квадраты $\rangle$ на HE , EK $\langle$ вместе $\rangle$, то-есть $\langle$ квадрат $\rangle$ на HK , будут втрое больше $\langle$ квадрата $\rangle$ на EK . И поскольку AB больше BC , как же AB к BC , так и $\langle$ квадрат $\rangle$ на AB к $\langle$ квадрату $\rangle$ на BC , то, значит, $\langle$ квадрат $\rangle$ на AB втрое больше $\langle$ квадрата $\rangle$ на BC . Но доказано, что и $\langle$ квадрат $\rangle$ на HK втрое больше $\langle$ квадрата $\rangle$ на KE . И KE полагается равной DB ; значит, и KH равна AB . И AB есть диаметр данной сферы; значит, и KH будет равна диаметру заданной сферы.

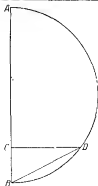
Итак, куб охвачен заданной сферой; и вместе с тем доказано, что диаметр этой сферы будет в квадратах втрое больше стороны куба, что и требовалось доказать.

Предложение 16

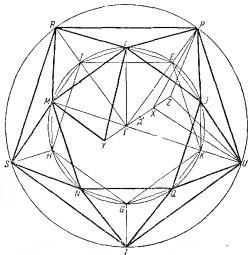
Составит икосаэдр, охватить сферой, как и вышеупомянутые фигуры, и показать, что сторона икосаэдра будет иррациональной — так называемой «меньшей».

Отложим диаметр AB заданной сферы, разделим (его) в C так, чтобы AC была бы учетверенной CB , опишем на AB полуокруг ADB , из C под прямыми углами к AB проведем прямую линию CD и соединим DB ; возьмем круг $EIHOK$, (прямая) из центра которого пусть будет равна DB , и впишем в круг $EIHOK$ равносторонний и равноугольный пятиугольник, обложим EI , IH , HO , OK , KE разделим пополам в точках L , M , N , Q , O и соединим LM , MV , NQ , QO , OL , EO . Значит, равносторонним будет и пятиугольник $LMNQO$, и прямая EO (есть сторона) десятиугольника. И из точек E , I , H , O , K под прямыми углами к плоскости круга восставим прямые EP , IR , HS , GT , KU , являющиеся равными «(прямой) из центра» круга $EIHOK$, и соединим PR , RS , ST , TU , UP , PL , LR , RM , MS , SN , NT , TQ , QU , UO , OP (черт. 17)*. И поскольку каждая из EP , KU стоит под прямыми углами к той же самой плоскости, то, значит, EP будет параллельна KU (предложение 6 книги XI). Она же ей и равна; прямые же, соединяющие с одной и той же стороны равные и параллельные (линии), будут равны и параллельны (предложение 33 книги I). Значит, PU будет равна и параллельна EK . Но EK — (сторона) равностороннего пятиугольника; значит, и PU будет стороной равностороннего пятиугольника, вписанного в круг $EIHOK$. На том же выг основании и каждая из PR , RS , ST , TU будет стороной равностороннего пятиугольника, вписанного в круг $EIHOK$; значит, пятиугольник $PRSTU$ равносторонний. И поскольку PE есть (сторона) шестиугольника, EO же — десятиугольника, и угол PEO прямой, то, значит, PO будет (стороной) пятиугольника; ибо сторона пятиугольника в квадратах равна (стороне) шестиугольника (вместе со стороной) десятиугольника, вписанных

* Ввиду неясности подлинного чертежа 17, примененного в издании Гейберга, мы даем более наглядный черт. 17 bis по изданию Хиза.

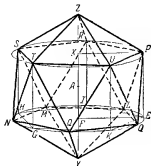


Черт. 17.



в тот же самый круг (предложение 10). На основании того же вот и OU будет стороной пятиугольника. Также и PU — $\langle$ сторона $\rangle$ пятиугольника; значит, треугольник POU будет равносторонним. На основании того же вот и каждый из треугольников PLR , RMS , SNT , TQU будет равносторонним. И поскольку доказано, что каждая из PL , PO $\langle$ есть сторона $\rangle$ пятиугольника, и также и LO $\langle$ сторона $\rangle$ пятиугольника, то, значит, треугольник PLO будет равносторонним. На основании того же вот и каждый из треугольников LRM , MSN , NTQ , QUO будет равносторонним.

Возьмём центр круга $EJHOK$ — точку F ; и из F под прямыми $\langle$ углами $\rangle$ к плоскости круга восставим FZ и продолжим по другую сторону как FY , отсечём $\langle$ стороны $\rangle$ шестиугольника FX и десятиугольника каждую из FY , XZ , и соединим PZ , PX , UZ , EF , LF , LY , YM . И поскольку каждая из FX , PE стоит под прямыми $\langle$ углами $\rangle$ к плоскости круга, то, значит, FX будет параллельна PE



Черт. 17 bis.

(предложение 6 книги XI). Они же и равны; значит, и EF , PX будут равны и параллельны (предложение 33 книги I). Но EF $\langle$ сторона $\rangle$ шестиугольника; значит, и PX $\langle$ сторона $\rangle$ шестиугольника. И поскольку PX есть $\langle$ сторона $\rangle$ шестиугольника, XZ же — десятиугольника, и угол PXZ прямой (определение 3 книги XI; предложение 29 книги I), то, значит, PZ будет $\langle$ стороной $\rangle$ пятиугольника (предложение 10). На том же вот основании и UZ будет $\langle$ стороной $\rangle$ пятиугольника, поскольку если соединим FK , XU , то они будут равными и противоположными, и FK , являясь $\langle$ прямой $\rangle$ из центра, будет $\langle$ стороной $\rangle$ шестиугольника; значит, и XU $\langle$ сторона $\rangle$ шестиугольника. Но XZ $\langle$ сторона $\rangle$ десятиугольника и угол UXZ прямой; значит,

UZ <сторона> пятиугольника. Также и PV <сторона> пятиугольника; значит, треугольник PVZ будет равносторонним. На том же вот основании будет равносторонним и каждый из остальных треугольников, основания которых суть прямые PR , RS , ST , TU , вершина же точка Z . Далее, поскольку FL <сторона> шестиугольника, FY же десятиугольника, и угол LFY прямой, то, значит, FY будет <стороной> пятиугольника (предложение 10). На том же вот основании, если мы соединим MF , являющуюся <стороной> шестиугольника, то окажется, что и MY <сторона> пятиугольника. Также и LM <сторона> пятиугольника; значит, треугольник LMY будет равносторонним. Подобным же вот образом докажется, что будет равносторонним и каждый из остальных треугольников, основания которых суть MN , NQ , QO , OL вершина же точка Y . Итак, составится икосаэдр, заключенный между двадцатью равносторонними треугольниками.

Вот нужно также охватить его заданной сферой и показать, что сторона икосаэдра будет иррациональной, так называемой «меньшей».

Действительно, поскольку FX есть <сторона> шестиугольника, XZ же десятиугольника, то, значит, FZ разделена в X в крайнем и среднем отношении, и большим ее отрезком будет FX (предложение 9); значит, будет, что как ZF к FX , так и FX к XZ . Но FX равна FE , а XZ <равна> FY ; значит, будет, что как ZF к FE , так и FE к FY . И углы ZFE , EFY будут прямыми; значит, если соединить прямой EZ , то угол VEZ будет прямым вследствие подобия треугольников VEZ , FEZ (предложение 8 книги VI). На основании вот того же, поскольку как ZF к FX , так и FX к XZ , а ZF равна YX , FX же — XP , то, значит, будет, что как YX к XP , так и PX к XZ . И вследствие этого опять, если соединим PY , то угол при P будет прямым (предложение 8 книги VI); значит, описанный на YZ полукруг пройдет и через P (предложение 31 книги III). И если при неподвижной YZ полукруг, обращаясь, опять вернется туда же, откуда начал двигаться, то он пройдет и через P и остальные точки икосаэдра, и икосаэдр будет охваченным сферой. Вот я утверждаю, что и заданной. Действительно, разделим FX пополам в A' . И поскольку

прямая линия FZ разделена в X в крайнем и среднем отношении, и меньшим её отрезком будет ZX , то, значит, ZX с присоединением половины большого отрезка XA' в квадратах будет в пять раз больше (квадрата) на половине большого отрезка; значит, (квадрат) на ZA' будет в пять раз больше (квадрата) на $A'X$ (предложение 3). И удвоенная ZA' будет ZY , удвоенная же $A'X$ (будет) FX ; значит, (квадрат) на ZY будет в пять раз больше (квадрата) на XF . И поскольку AC есть угловатая CB , то, значит, AB будет угловатой BC . Как же AB к BC , так и (квадрат) на AB к (квадрату) на BD (предложение 8 книги VI; определение 9 книги V); значит, (квадрат) на AB в пять раз больше (квадрата) на BD . Доказано же, что и (квадрат) на ZY в пять раз больше (квадрата) на FX . И DB равна FX ; ибо каждая из них будет равна «(прямой) из центра» круга $EIHOK$; значит, и AB равна YZ . И AB есть диаметр заданной сферы; и значит, YZ будет равна диаметру заданной сферы. Значит, икосаэдр обит заданной сферой.

Вот я утверждаю, что сторона икосаэдра будет иррациональной, так называемой «меньшей». Действительно, поскольку диаметр сферы рационален и он будет в степени в пять раз больше «(прямой) из центра» круга $EIHOK$, то, значит, рациональной будет и «(прямая) из центра» круга $EIHOK$; так что и его диаметр будет рациональным. Если же в круг, имеющий рациональный диаметр, вписывается равносторонний пятиугольник, то сторона пятиугольника будет иррациональной, так называемой «меньшей» (предложение 11). Сторона же пятиугольника $EIHOK$ будет «и стороной» икосаэдра. Итак, сторона икосаэдра будет иррациональной, так называемой «меньшей».

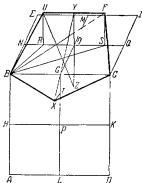
Следствие

Из этого вот ясно, что диаметр сферы в квадратах будет в пять раз больше «(прямой) из центра» круга, по которому вычерчивается икосаэдр, и что диаметр сферы складывается из (сторон) шестиугольника и двух (сторон) десятиугольника, вписанных в тот же самый круг. Это и требовалось доказать.

Предложение 17

Составить додекаэдр, охватить его сферой, как и выше упомянутые фигуры, и показать, что сторона додекаэдра будет иррациональной — так называемым вычетом.

Поставим под прямыми углами друг к другу две плоскости $ABCD$, $CBEI$ вышерассмотренного куба (предложение 15), каждую из сторон AB , BC , CD , DA , EI , EB , IC разделим пополам в H , G , K , L , M , N , Q и соединим HK , GL , MG , NQ ; каждую из NO , OQ , GP разделим в крайнем и среднем отношении в точках R , S , T , и пусть большие их отрезки будут RO , OS , TP ; из точек R , S , T под прямыми углами к плоскостям куба восставим во внешние стороны куба RU , SF , TX , отложим их равными RO , OS , TP и соединим UB , BX , XC , CF , FU . Я утверждаю, что пятиугольник $UBXCF$ будет равно-



Черт. 18.

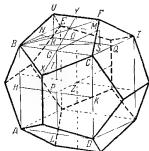
ним и в одной плоскости и ещё равноугольным (черт. 18). Действительно, соединим RB , SB , FB . И поскольку прямая NO разделена в R в крайнем и среднем отношении, и большим отрезком является RO , то, значит, «квадраты» на ON , NR (вместе) будут вдвое больше «квадрата» на RO (предложение 4). Но ON равна NB , OR же — RU ; значит, «квадраты» на BN , NR (вместе) будут вдвое больше «квадрата» на RU . «Квадратам» же на BN , NR равен «квадрат» на BR (предложение 47 книги I); значит, «квадрат» на BR будет вдвое больше «квадрата» на RU ; так что «квадраты» на BR , RU будут в четыре раза больше «квадрата» на RU . «Квадратам» же на BR , RU будет равен «квадрат» на BU (предложение 47 книги I); значит,

⟨квипрат⟩ на BU в четыре раза больше ⟨квадрата⟩ на UR ; значит, BU будет удвоенной RU . Также и FU будет удвоенной UR , поскольку и SR ⟨есть удвоенная⟩ OR , то-есть RU ; значит, BU равна UF . Подобным же вот образом докажется, что и каждая из BX , XC , CF будет равна каждой из BU , UF . Значит, пятиугольник $BUFCX$ будет равносторонним. Вот я утверждаю, что ⟨он⟩ будет и в одной плоскости. Действительно, из O параллельно каждой из RU , SF во внешние стороны куба проведём OY и соединим YG , GX ; и утверждаю, что YGX будет прямой. Действительно, поскольку CP разделена в T в крайнем и среднем отношении и большим её отрезком является PT , то будет, значит, что как GP к PT , так и PT к TG . Но GP равна GO , PT же — каждой из TX , OY ; значит, будет, что как GO к OY , так и XT к TG . И GO параллельна TX (ибо каждая из них будет под прямыми ⟨углами⟩ к плоскости BD (предложение 6 книги XI), TG же ⟨параллельна⟩ OY (ибо каждая из них будет под прямыми ⟨углами⟩ к плоскости BI). Если же два треугольника, как YOG , GTX , имеющие две стороны, пропорциональные двум ⟨сторонам⟩, составляют по одному углу так, чтобы соответственные их стороны были бы и параллельны, то остальные прямые будут по ⟨одной⟩ прямой (предложение 32 книги VI); значит, YG будет по ⟨одной⟩ прямой с GX . Всякая же прямая находится в одной плоскости (предложение 1 книги XI); значит, пятиугольник $UBXCF$ будет в одной плоскости.

Вот я утверждаю, что он будет и равноугольным.

Действительно, поскольку прямая линия NO разделена в R в крайнем и среднем отношении, и большим отрезком является OR [значит, будет — как вместе взятые NO , OR к ON , так и NO к OR], OR же равна OS [значит, будет — как SN к NO , так и NO к OS], то, значит, NS разделена в O в крайнем и среднем отношении, и большим её отрезком будет NO (предложение 3); значит, ⟨квадраты⟩ на NS , SO ⟨вместе⟩ будут втрое больше ⟨квадрата⟩ на VO (предложение 4). Но NO равна NB , OS же — SF ; значит, ⟨квадраты⟩ на NS , SF ⟨вместе⟩ будут втрое больше ⟨квадрата⟩ на NB ; так что ⟨квадраты⟩ на FS , SN , NB будут в четыре раза больше ⟨квадрата⟩ на NB . Квадратам же

на SN , NB равен <квадрат> на SB (предложение 47 книги I); значит, <квадраты> на BS , SF , то-есть <квадрат> на BF (ибо угол FSB прямой) (определение 3 книги XI), будут в четыре раза больше <квадрата> на NB ; значит, FB есть удвоенная BN . Также и BC есть удвоенная BN ; значит, BF будет равна BC . И поскольку две BU , UF равны двум BX , XC , и основание BF равно основанию BC , то, значит, угол BUF будет равен углу BXC (предложение 8 книги I). Подобным же вот образом докажем, что



Черт. 18 bis.

и угол UFC будет равен BXC ; значит, три угла BXC , BUF , UFC будут друг другу равны. Если же у равностороннего пятиугольника равны друг другу три угла, то пятиугольник будет равноугольным (предложение 7); значит, пятиугольник $BUFCX$ будет равноугольным. Доказано же, что и равносторонним; значит, пятиугольник $BUFCX$ будет равносторонним и равноугольным и находится

на одной стороне BC куба. Значит, если на каждой из двенадцати сторон куба мы устроим то же самое, то будет составлена некоторая телесная фигура, заключённая между двенадцатью равносторонними и равноугольными пятиугольниками 12 , которая называется додекаэдром (черт. 18 bis)^{*}.

Вот нужно также охватить его заданной сферой и показать, что сторона додекаэдра будет иррациональной — так называемым вычетом.

Действительно, продолжим YO и пусть <это> будет YZ ; значит, OZ встречается с диаметром куба, и они пересекают друг друга пополам, ибо что доказано в предпоследней

^{*} Для ясности мы даём чертеж додекаэдра в привычном для нас виде с обозначениями подлинника.

теореме одиннадцатой книги (предложение 38 книги XI). Пусть они пересекаются в Z ; значит, Z будет центром сферы, охватывающей куб, и ZO — половиной стороны куба. Вот соединим UZ . И поскольку прямая линия NS разделена в O в крайнем и среднем отношении и большим ее отрезком является NO , то, значит, «квадраты» на NS , SO «вместе» будут вдвое больше «квадрата» на NO (предложение 4). Но NS равна YZ , поскольку и NO равна OZ , а YO «равна» OS . Но и OS «равна» YU , так как равна и RO ; значит, «квадраты» на ZY , YU «вместе» будут вдвое больше «квадрата» на NO . «Квадратам» же на ZY , YU равен «квадрат» на UZ (предложение 47 книги I); значит, «квадрат» на UZ вдвое больше «квадрата» на NO . Но также и «(прямая) из центра» сферы, охватывающей куб, будет в ступени в три раза больше стороны куба; ибо перед этим было показано, «как» составить куб, охватить его сферой и доказать, что диаметр сферы в ступени будет вдвое больше стороны куба (предложение 15). Если же целая «вдвое больше» целой, то и половина — половиной; и NO есть половина стороны куба; значит, UZ будет равна «(прямой) из центра» охватывающей куб сферы. И Z является центром охватывающей куб сферы; значит, точка U будет на поверхности сферы. Подобным же вот образом докажем, что и каждый из остальных углов додекаэдра будет на поверхности этой сферы; итак, додекаэдр охвачен заданной сферой.

Вот я утверждаю, что сторона додекаэдра будет иррациональной — так называемым вычетом.

Действительно, поскольку при разделении NO в крайнем и среднем отношении большим отрезком будет RO , при разделении же OQ в крайнем и среднем отношении будет OS , то, значит, при разделении в крайнем и среднем отношении всей NQ большим отрезком будет RS . {Так вот поскольку будет, что как NO к OR , так и OR к RN , и «так же будут относиться и» удвоенные (ибо части имеют одно и то же отношение с равнокрайными) (предложение 15 книги V), то, значит, как NQ к RS , так и RS к вместе взятым NR , SQ . Но NQ больше RS ; значит, и RS больше вместе взятых NR , SQ (предложение 14 книги V);

значит, NQ разделена в крайнем и среднем отношении, и большим её отрезком будет RS *) Но RS равна UF ; значит, при делении NQ в крайнем и среднем отношении большим отрезком будет UF . И поскольку диаметр сферы рационален и в степени втрое больше стороны куба, то, значит, рациональной будет и NQ , являющаяся стороной куба. Если же рациональная линия разделена в крайнем и среднем отношении, то каждый из отрезков будет иррациональным, <а именно> вычетов (предложение б).

Итак, UF , являющаяся стороной додекаэдра, будет иррациональной, <а именно> вычетов.

Следствие

Из этого вот ясно, что при делении в крайнем и среднем отношении стороны куба больший отрезок будет стороной додекаэдра, что и требовалось доказать.

Предложение 18

*Сопоставить **) стороны пяти этих фигур и сравнить <их> между собой*

Возьмём диаметр AB заданной сферы и разделим в C так, чтобы AC была бы равной CB , в D же так, чтобы AD была бы удвоенной DB ; опишем на AB полуокруг AEB . из C, D под прямыми <углами> к AB проведём CE, DI и соединим AI, IB, EB (черт. 19). И поскольку AD вдвое больше DB , то, значит, AB будет втрое больше BD . Значит, «переворачивая», BA будет в полтора раза больше AD . Как же BA к AD , так и <квадрат> на BA к <квadrату> на AI (определение 9 книги V); ибо треугольник AIB равноуголен с треугольником AID (предложение 8 книги VI); значит, <квадрат> на BA будет в полтора раза больше <квadrата> на AI . Также и диаметр сферы будет в степени

*) Текст в фигурных скобках Гейберг считает сомнительным, не включая его, однако, в квадратные скобки.

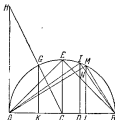
**) В подлиннике *ἐκείων* — буквально: «выложить, выставить».

в полтора раза больше стороны пирамиды (предложение 13). И AB есть диаметр сферы; значит, AI будет равна стороне пирамиды.

Далее, поскольку AD вдвое больше DB , то, значит, AB будет втрое больше BD . Как же AB к BD , так и $\langle \text{квадрат} \rangle$ на AB к $\langle \text{квадрату} \rangle$ на BI (предложение 8 книги VI; определение 9 книги V); значит, $\langle \text{квадрат} \rangle$ на AB будет в три раза больше $\langle \text{квадрата} \rangle$ на BI . Также и диаметр сферы будет в степени в три раза больше стороны куба (предложение 15). И AB есть диаметр сферы; значит, BI будет стороной куба.

И поскольку AC равна CB , то, значит, AB будет вдвое больше BC . Как же AB к BC , так и $\langle \text{квадрат} \rangle$ на AB к $\langle \text{квадрату} \rangle$ на BE (предложение 8 книги VI; определение 9 книги V); значит, $\langle \text{квадрат} \rangle$ на AB будет в два раза больше $\langle \text{квадрата} \rangle$ на BE . Также и диаметр сферы будет в степени в два раза больше стороны октаэдра (предложение 14). И AB есть диаметр заданной сферы; значит, BE будет стороной октаэдра.

Вот из точки A под прямыми $\langle \text{углами} \rangle$ к прямой AB проведём AN , отложим AN равной AB , соединим NC и из C проведём на AB перпендикуляр GK . И поскольку NA вдвое больше AC (ибо NA равна AB), как же NA к AC , так и GK к KC (предложение 4 книги VI), то, значит, GK вдвое больше KC . Значит, $\langle \text{квадрат} \rangle$ на GK будет в четыре раза больше $\langle \text{квадрата} \rangle$ на KC ; значит, $\langle \text{квадраты} \rangle$ на GK , KC , что $\langle \text{вместе} \rangle$ составляет $\langle \text{квадрат} \rangle$ на GC (предложение 47 книги I), будут в пять раз больше $\langle \text{квадрата} \rangle$ на KC . Но GC равна CB ; значит, $\langle \text{квадрат} \rangle$ на BC будет в пять раз больше $\langle \text{квадрата} \rangle$ на CK . И поскольку AB вдвое больше CB , и у них AD вдвое больше DB , то, значит, остаток BD будет вдвое больше остатка DC . Значит, BC будет втрое больше CD ; значит, $\langle \text{квадрат} \rangle$ на BC будет в девять раз больше $\langle \text{квадрата} \rangle$ на CD . $\langle \text{Квадрат} \rangle$



Черт. 19.

же на BC в пять раз больше $\langle$ квадрата $\rangle$ на CK ; значит, $\langle$ квадрат $\rangle$ на CK больше $\langle$ квадрата $\rangle$ на CD . Значит, CK будет больше CD . Отложим CL , равную CK и из L под прямыми $\langle$ углами $\rangle$ к AB проведём LM и соединим MB . И поскольку $\langle$ квадрат $\rangle$ на BC в пять раз больше $\langle$ квадрата $\rangle$ на CK и удвоенная BC есть AB , удвоенная CK же — KL , то, значит, $\langle$ квадрат $\rangle$ на AB будет в пять раз больше $\langle$ квадрата $\rangle$ на KL . Также и диаметр сферы будет в степени в пять раз больше $\langle$ прямой $\rangle$ из центра того круга, по которому вычерчивается икосаэдр (предложение 16, следствие). И AB есть диаметр сферы; значит, KL будет $\langle$ прямой $\rangle$ из центра того круга, по которому вычерчивается икосаэдр; значит, KL будет стороной шестиугольника $\langle$ для $\rangle$ упомянутого круга (предложение 15 книги IV, следствие). И поскольку диаметр сферы складывается из $\langle$ сторон $\rangle$ шестиугольника и двух $\langle$ сторон $\rangle$ десятиугольника, вписанных в упомянутый круг (предложение 16, следствие), и AB есть диаметр сферы, KL же сторона шестиугольника, и AK равна LB , то, значит, каждая из AK , LB будет стороной десятиугольника, вписанного в круг, по которому вычерчивается икосаэдр. И поскольку LB $\langle$ сторона $\rangle$ десятиугольника, ML же — шестиугольника (ибо она равна KL , поскольку $\langle$ она равна $\rangle$ OK , так как они одинаково отстоят от центра; и каждая из OK , KL в два раза больше KC), то, значит, MB будет $\langle$ стороной $\rangle$ пятиугольника (предложение 10). $\langle$ Сторона $\rangle$ же пятиугольника будет $\langle$ и стороной $\rangle$ икосаэдра (предложение 16); значит, MB есть $\langle$ сторона $\rangle$ икосаэдра.

И поскольку IB есть сторона куба, то разделим её в крайнем и среднем отношении в N , и пусть большим отрезком будет NB ; значит, NB будет стороной додекаэдра (предложение 17, следствие).

И поскольку, как доказано, диаметр сферы будет в степени в полтора раза больше AI — стороны пирамиды, в степени в два раза больше BE — стороны октаэдра, и в степени в три раза больше IB — стороны куба, то, значит, каких $\langle$ единиц $\rangle$ диаметр сферы $\langle$ содержит $\rangle$ в степени шесть, таких же $\langle$ сторона $\rangle$ пирамиды $\langle$ будет иметь $\rangle$ четыре, $\langle$ сторона $\rangle$ же октаэдра три, куба же — две. Значит, стороны

пирамиды будет в степени сверхтретней *) для стороны октаэдра и в степени удвоенной для <стороны> куба, <сторона> же октаэдра в степени <будет> полуторной для стороны куба. Теперь упомянутые стороны этих трёх тел — и подразумеваю — пирамиды, октаэдра и куба — будут находиться друг к другу в рациональных отношениях. Остальные же две — я подразумеваю — икосаэдра и додекаэдра — не будут находиться в рациональных отношениях ни друг к другу ни к вышеупомянутым; ибо они будут иррациональными, одна — «меньшей» (предложение 16), другая же — «высшей» (предложение 17).

А что сторона MB икосаэдра будет больше NB <стороны> додекаэдра, докажем так.

Действительно, поскольку треугольник IDB равноуголен треугольнику IAB (предложение 8 книги VI), то будет пропорция — как DB к BI , так и BI к BA (предложение 4 книги VI). {И поскольку три прямые пропорциональны, то будет — как первая к третьей, так и <квадрат> на первой к <квадрату> на второй (определение 9 книги VI) **}; значит, будет как DB к BA , так и <квадрат> на DB к <квадрату> на BA ; значит, обратно, как AB к BD , так и <квадрат> на IB к <квадрату> на BD . Но AB втрое больше BD ; значит, <квадрат> на IB в три раза больше <квадрата> на BD . Также <квадрат> на AD в четыре раза больше <квадрата> на DB ; ибо AD вдвое больше DB ; значит, <квадрат> на AD больше <квадрата> на IB ; значит, AD больше IB ; значит, и подалвно AL будет больше IB . И при разделении AL в крайнем и среднем отношении большим отрезком будет KL , поскольку LK будет <стороной> шестиугольника, KA же — десятиугольника (предложение 9); при разделении же IB в крайнем и среднем отношении большим отрезком будет NB ; значит, KL больше NB . Но KL равна LM ; значит, LM больше NB [MB же будет

*) У Евклида $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{2}$.

**) Текст в фигурных скобках Гейберг считает сомнительным, не заключая его, однако, в квадратные скобки. Удивительно, почему в самом конце понадобилось полностью сформулировать положение, которое до сих пор молчаливо использовалось.

больше LM]. Значит, и подавно MB , являющаяся стороной икосаэдра, будет больше NB , являющейся стороной додекаэдра, что и требовалось доказать (8).

Вот я утверждаю, что кроме упомянутых пяти тел нельзя построить другого тела, заключённого между равносторонними и равноугольными равными друг другу <многоугольниками>.

Действительно, из двух треугольничков или вообще плоских (фигур) телесный угол не составляется (определение 11 книги XI). Из трёх же треугольников <составляется угол> пирамида, из четырёх же — октаэдра, из пяти же — икосаэдра; из шести же равносторонних и равноугольных треугольников, приставленных к одной точке, не получится телесного угла; действительно, так как угол равностороннего треугольника составляет две трети *) прямого, то шесть будут равны четырём прямым; это же невозможно, ибо всякий телесный угол заключается между менее чем четырьмя прямыми (предложение 21 книги XI). На основании вот этого телесный угол не составит более чем из шести плоских углов. Между тремя квадратами заключается угол куба; между четырьмя же <заключить телесный угол> невозможно; действительно, опять получатся четыре прямых. Для равносторонних и равноугольных пятиугольников между тремя <заключается угол> додекаэдра; между четырьмя же <заключить телесный угол> невозможно; действительно, так как угол равностороннего пятиугольника составляет один прямой и пятую <часть>, то четыре угла будут больше четырёх прямых; это же невозможно. Вследствие той же самой невозможности телесный угол не будет, конечно, заключаться и между другими многоугольными фигурами.

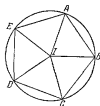
Итак, кроме упомянутых пяти тел нельзя построить другой телесной фигуры, заключённой между равносторонними и равноугольными <фигурами>, что и требовалось доказать.

*) διτρίοις — буквально: «две части».

Лемма

А что угол равностороннего и равноугольного пятиугольника будет один прямой с пятой (частью), доказывается так.

Пусть будет равносторонний и равноугольный пятиугольник $ABCDE$; опишем около него круг $ABCDE$, возьмем его центр I и соединим IA , IB , IC , ID , IE (черт. 20). Они, значит, разделят пополам углы пятиугольника при A , B , C , D , E . И поскольку пять углов при I равны четырем прямым и равны (между собой), то, значит, один из них, например AIB , будет составлять один прямой без пятой; значит, остальные IAB , ABI будут составлять один прямой с пятой. Но IAB равен IBC ; значит, весь угол ABC пятиугольника будет один прямой с пятой, что и требовалось доказать (9, 10, 11, 12).



Черт. 20.



КНИГА ЧЕТЫРНАДЦАТАЯ

Василид из Тира, о мой Протарх, прибывши в Александрию и сойдясь с моим отцом вследствие общих математических интересов, провёл у него большую часть времени своего пребывания. И вот однажды, когда они разбирали написанную Аполлонием книгу о сравнении вписанных в одну и ту же сферу додекаэдра и икосаэдра, — в каком именно отношении они друг к другу находятся, — Василид с моим отцом пришли к мнению, что это не было правильно изложено Аполлонием, и они сами написали исправленный текст, как я мог услыхать от моего отца. Позднее и мне самому попалась в руки другая надпись Аполлонием книга, содержащая некоторое доказательство, касающееся вышеизложенного, и я сам с большим воодушевлением занялся исследованием этой задачи. Теперь с изданной Аполлонием книгой можно, к извечному, всем ознакомишься, так как она приходится в обращение, как кажется, в позднейшей более тщательно написанной редакции; сам же я, написавши в виде комментария все, что мне показалось нужным, решил обратиться с этим сочинением к тебе, — отчасти потому, что вследствие твоих успехов во всех отраслях математики, а особенно в геометрии, ты в состоянии с полным знанием дела судить обо всём, что я в дальнейшем скажу, отчасти же потому, что ты, хорошо знакомый с моим отцом и благосклонный ко мне, благожелательно сложиши свой слух к этому сочинению. На этом, пожалуй, следовало бы кончить предисловие и обратиться к изложению.

[Предложение 1.] *Перпендикуляр, опущенный из центра какого-нибудь круга на сторону вписанного в этот круг пятиугольника, будет половиной суммы сторон десятиугольника и десятиугольника, вписанных в тот же круг.*

Пусть будет круг ABC и пусть BC — сторона пятиугольника в круге ABC , возьмем центр D круга, опустим из D на BC перпендикуляр DE и продолжим «по прямой» с DE прямые EF, DA . Я утверждаю, что DE будет половиной суммы сторон шестиугольника и десятиугольника, вписанных в тот же круг (черт. 1).

Действительно, соединим DC, CF , отложим HE , равную EF , и из точки H к C проведем соединительную прямую HC . Теперь, поскольку вся окружность круга в пять раз больше дуги BFC , и половиной всей окружности круга будет ACF , половиной BFC

же FC , то, значит, дуга ACF будет в пять раз больше дуги FC . Значит, AC будет учетверенной FC . Как же AC к FC , так будет и угол ADC к FDC («Начала», VI, 33). Значит, угол ADC в четыре раза больше FDC . Но угол ADC вдвое больше EFC («Начала», III, 20); значит, и угол EFC вдвое больше HDC . Также угол EFC равен EHC («Начала», I, 4). Значит, и угол EHC вдвое больше HDC . Значит, DH равна HC («Начала», I, 6, 32). Но HC равна FC . Значит, и DH равна FC . Также и HE равна FE . Значит, и DE равна вместе взятым FE , FC . Прибавим к обеим по DF . Значит, вместе вместе DE , FC будут вдвое больше DF . Но DF равна стороне шестиугольника, FC же — десятиугольника; итак, DE будет половиной сложенных вместе сторон шестиугольника и десятиугольника, вписанных в тот же самый круг.

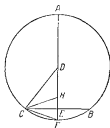
Вот из [12-го] предложения в книге XII ясно, что опущенный из центра круга на сторону равностороннего треугольника перпендикуляр будет половиной радиуса круга.

Тот же самый круг охватывает и пятиугольник додекаэдра и треугольник икосаэдра, вписанных в ту же самую сферу. Это излагается Аристотелем в книге, озаглавленной «О сравнении бейль, Аполлонием же во втором издании. Сравнение додекаэдра с икосаэдром», где доказывается, что как поверхность додекаэдра к поверхности икосаэдра, так и сам додекаэдр будет относиться к икосаэдру вследствие того, что одна и та же прямая будет перпендикуляром, опущенным из центра сферы как на пятиугольник додекаэдра, так и на треугольник икосаэдра. Я же хочу показать, что один и тот же круг охватывает и пятиугольник додекаэдра, и треугольник икосаэдра, вписанных в ту же сферу, предварительно изложив следующее.

[Предложение 2.] Если в круг будет описан равносторонний и равноугольный пятиугольник, то хорда, стягивающая две стороны и сама сторона пятиугольника в квадратах будут вместе взяты в пять раз больше радиуса.

Пусть будет круг ABC , и пусть AC будет сторона пятиугольника в круге ABC ; возьмем центр D круга, опустим на AC перпендикуляр DE , продолжим его до B , E и соединим AB . Я утверждаю, что квадраты на BA , AC будут в пять раз больше квадрата на DE (черт. 2).

Соединим AF ; значит, AF будет стороной десятиугольника. И так как BE вдвое больше ED , то, значит, BE^2 будет в четыре раза больше ED^2 . Но BF^2 равен $BA^2 + AE^2$. Значит, $BA^2 + AE^2$ в четыре раза больше DE^2 . Значит, $BA^2 + AE^2$ и ED^2 в пять раз



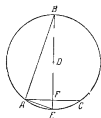
Черт. 1.

больше DF^2 . Но $DE^2 + EA^2$ равны AC^2 («Начала», XIII, 10). Значит, $AB^2 + AC^2$ в пять раз больше DE^2 .

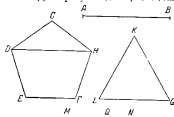
Доказавши это, следует показать, что [предложение 3] *один и тот же круг охватывает и пятиугольник додекаэдра и треугольник икосаэдра, вписанных в ту же самую сферу.*

Возьмем диаметр AB сферы, и впишем в нее додекаэдр и икосаэдр; пусть один из пятиугольников додекаэдра будет $CDFFH$, треугольник же икосаэдра KLQ . Я утверждаю, что радиусы описанных около них кругов будут равны, то-есть что тот же самый круг охватывает и пятиугольник $CDEFGH$ и треугольник KLQ (черт. 3).

Соединим DH ; значит, DH будет стороной куба («Начала», XIII, 17). Возьмем теперь некоторую прямую MN так, чтобы AB^2



Черт. 2.



Черт. 3.

была в пять раз больше MN^2 . Но также и диаметр сферы будет в степени в пять раз больше радиуса круга, по которому вычерчивается икосаэдр («Начала», XIII, 16, следствие). Значит, MN будет равна радиусу круга, по которому вычерчивается икосаэдр. Разделим MN в крайнем и среднем отношении в Q , и пусть большим отрезком будет MQ . Значит, MQ будет стороной десятиугольника^{*)}. И так как AB^2 в пять раз больше MN^2 , а BA^2 в три раза больше DH^2 («Начала», XIII, 15), то, значит, три DH^2 равны пяти MN^2 . Как же три DH^2 к трем CH^2 , так и пять MN^2 к пяти MQ^2 . Но пять MQ^2 в пять MN^2 будут равны пяти KL^2 («Начала», XIII, 16; 10, ¹⁾). Значит, пять KL^2 будут равны трем CH^2 .

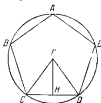
^{*)} Это общезвестное свойство стороны правильного десятиугольника легко может быть получено из сопоставления предложений 5 и 9 книги XIII «Начала».

¹⁾ Это следует из того, что стороны выпуклого пятиугольника будет большим отрезком при делении в крайнем и среднем отношении стороны правильного звездчатого пятиугольника («Начала», XIII, 8).

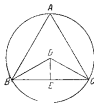
^{**)} Сторона икосаэдра равна стороне пятиугольника, вписанного в круг с радиусом MN («Начала», XIII, 16).

и трёх DH^2 . Но пять KL^2 будут равны пятнадцати квадратам радиуса круга, описанного около треугольника GKL («Начала», XIII, 12), а три DH^2 и три CH^2 будут равны 15 квадратам радиуса круга, описанного около $CDEFH$; ибо выше было доказано (предложение 2), что DH^2 вместе с CH^2 и пять раз больше квадрата радиуса круга, описанного около пятиугольника $CDFPH$. Итак, пятнадцать квадратов одного радиуса равны пятнадцати квадратам другого радиуса; значит, один диаметр равен другому диаметру.

Итак, один и тот же круг охватывает пятиугольник додекаэдра и треугольник икосаэдра, вписанных в ту же самую сферу.



Черт. 4.



Черт. 5.

[Предложение 4.] Если будет равносторонний и равноугольный пятиугольник и около него круг, и из центра будет опущен перпендикуляр на одну из сторон, то тридцать раз взятый прямоугольник на одной стороне и этом перпендикуляре будет равен поверхности додекаэдра.

Пусть равносторонний и равноугольный пятиугольник будет A^3CDF и около пятиугольника круг ACD ; возьмём центр F круга и из F опустим на CD перпендикуляр FH . Я утверждаю, что тридцать раз взятос $CD \times FH$ будет равно двенадцати пятиугольникам $ABCDF$ (черт. 4).

Соединим CF , FD . Поскольку $CD \times FH$ вдвое больше треугольника CFD , то, значит, пять раз $CD \times FH$ будут (составлять) десять треугольников. Возьмём и то и другое шесть раз. Значит, тридцать раз $CD \times FH$ будут равны поверхности додекаэдра.

Подобным же вот образом докажем, что [предложение 5], если будет равносторонний треугольник ABC и около него круг, и центр круга G , перпендикуляр же на BC есть GE то тридцать раз $BC \times GE$ будет равно поверхности икосаэдра (черт. 5).

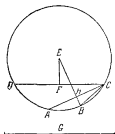
Действительно, поскольку опять $DE \times BC$ будет вдвое больше треугольника DBC , то, значит, два треугольника DBC будут равны $DE \times BC$. Возьмём то и другое трижды; значит, шесть треугольников DBC равны трём $DE \times BC$. Но шесть треуголь-

ников DBC суть два треугольника ABC . Значит, три $DE \times BC$ равны двум ABC . Возьмем то и другое десять раз. Значит, тридцать раз $DE \times BC$ будет равно двадцати треугольникам ABC , то-есть поверхности икосаэдра.

Таким образом, как поверхность додекаэдра к поверхности икосаэдра, так и прямоугольник между стороной первого и опущенным на нее перпендикуляром из центра круга около пятиугольника $ABCDE$ будет относиться к прямоугольнику между стороной икосаэдра и опущенным на нее перпендикуляром из центра круга около треугольника, если додекаэдр и икосаэдр вписаны в одну и ту же сферу.

Выясняя это, должно показать, что [предложение 6] как поверхность додекаэдра к поверхности икосаэдра, так будет и сторона куба к стороне икосаэдра.

Возьмем круг ABC , охватывающий пятиугольник додекаэдра и треугольник икосаэдра, вписанных в ту же самую сферу, и впишем в круг ABC сторону икосаэдра CD и додекаэдра AC (черт. 6). Значит, CD будет стороной равностороннего треугольника, а AC — пятиугольника. Затем возьмем центр E круга и из E на DC , CA опустим перпендикуляры EF , EH , продолжим HB по прямой с прямой EH , соединим BC и



Черт. 6.

отложим G — сторону куба. Я утверждаю, что будет как поверхность додекаэдра к поверхности икосаэдра, так и G к CD .

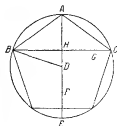
Действительно, поскольку при делении в крайнем и среднем отношении вместе взятых BE и BC большим отрезком будет BE («Начала», XIII, 9) и половиной вместе взятых $EB + BC$ будет EH (предложение 1), половиной BE же (будет) FF (предложение 1, в конце; «Начала», XIII, 12), то, значит, при делении EH в крайнем и среднем отношении большим отрезком будет FF . Но также и при делении G в крайнем и среднем отношении большим отрезком будет CA («Начала», XIII, 17, следствие). Значит, как G к CA , так и EH к EF . Значит, $EF \times G$ будет равно $CA \times FH$. И поскольку как G к CD , так и $FE \times G$ к $CD \times FE$, (произведение) же $FE \times G$ равно $CA \times EH$, то, значит, как G к CD , так и $CA \times EH$ к $CD \times FE$, то-есть как поверхность додекаэдра к поверхности икосаэдра. Итак, как поверхность додекаэдра к поверхности икосаэдра, так и G к CD .

Можно и иначе доказать, что как поверхность додекаэдра к поверхности икосаэдра, так будет и сторона куба к стороне икосаэдра, если предварительно изложить следующее.

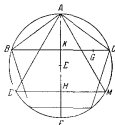
Пусть будет круг ABC ; впишем в круг ABC стороны AB , BC равностороннего пятиугольника, соединим BC , возьмем

центр O круга и от A к I проведём соединительную прямую AD , продолжим IE по прямой с прямой AD и отложим DF — половину AD ; пусть также HC будет втрое больше CG (черт. 7). И утверждаю, что $AF \times BG$ будет равно этому пятиугольнику.

Действительно, от B к D проведём соединительную прямую BD . Поскольку AD вдвое больше DF , то AF будет в полтора раза больше AD . Затем, поскольку HC втрое больше CG , то HG вдвое больше GC . Значит, HC будет в полтора раза больше GH . Значит, как FA к AD , так и CH к HG . Значит, $AF \times HG$ равно $DA \times CH$. Но CH равна BH . Значит, $AD \times BH$ будет равно $FA \times HG$. Но $AD \times BH$ составляет два треугольника



Черт. 7.

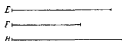
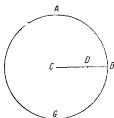


Черт. 8.

ка ABD . Значит, и $AF \times HG$ будет составлять два треугольника ABD . Таким образом, значит, пять $AF \times HG$ составят десять треугольников. Десять же треугольников будут два пятиугольника. Значит, пять $AF \times HG$ будут равны двум пятиугольникам. Теперь, поскольку HG вдвое больше GC , то $AF \times HG$ будет вдвое больше $AF \times GC$. Значит, два $AF \times GC$ будут равны $AF \times HG$. И значит, десять $AF \times GC$ будут равны пяти $AF \times HG$, то-есть двум пятиугольникам. Таким образом, пять $AF \times GC$ будут равны одному пятиугольнику. Пять же раз $AF \times GC$ будет равно $AF \times GB$, так как GB есть удвоенная GC , а AF будет общей высотой. Итак, $AF \times BG$ будет равно одному пятиугольнику.

Теперь, выяснив всё это, возьмём круг ABC , охватывающий пятиугольник додекаэдра и треугольник икосаэдра, вписанных в ту же самую сферу, впишем в круг ABC стороны BA , AC равностороннего пятиугольника, соединим BC , возьмём центр E круга, из A к E проведём соединительную прямую AE и продолжим её до F , и пусть AE будет в два раза больше EH , а EC втрое больше CG ; из H под прямым углом к AF проведём HM и продолжим HD по прямой с HM . Значит, DM будет стороной равностороннего треугольника. Соединим AD , AM . Значит, треугольник ADM будет равносторонним (черт. 8). И поскольку

$AH \times GB$ будет равно пятиугольнику, $AH \times HD$ же — треугольнику ADM , то, значит, будет, что как $AH \times GB$ к $DH \times HA$, так и пятиугольник к треугольнику. Как же $BG \times AH$ к $DH \times HA$, так и BG к DH . И значит, как двенадцать GB к двадцати DH , так и двенадцать пятиугольников к двадцати треугольникам, то-есть поверхность додекаэдра к поверхности икосаэдра. И двенадцать BG составят десять BC ; ибо BG будет в пять раз больше GC , а BC в шесть раз больше GC . Значит, шесть BG будут равны пяти BC . Также и удвоенные. Двадцать же DH будут десять DM , ибо DM вдвое больше DH . Значит, как десять BC к десяти DM , так и поверхность додекаэдра к поверхности икосаэдра. И BC есть сторона куба, DM же — икосаэдра. И значит, как поверхность додекаэдра к поверхности икосаэдра, так и BC к DM , то-есть сторона куба к стороне икосаэдра.



Черт. 9.

Вот нужно доказать, что [предложение 7], если какую-нибудь прямую разделить в крайнем и среднем отношении, то как квадратирующая вместе взятые стороны E -ей прямой и большего отрезка к квадратирующей вместе взятых квадратов E -ей прямой и меньшего отрезка, так будет относиться и сторона куба к стороне икосаэдра.

Пусть AGB будет круг, охватывающий пятиугольник додекаэдра и треугольник икосаэдра, вписанных в ту же сферу; возьмём центр C круга, проведём из точки C какую-нибудь произвольную прямую CB и разделим её в D в крайнем и среднем отношении; пусть больший отрезок будет CD . Значит, CD есть сторона десятиугольника, вписанного в тот же самый круг. Возьмём также стороны икосаэдра E , додекаэдра F и куба H (черт. 9). Значит, E будет сторона равностороннего треугольника, F же — вписанного в тот же самый круг пятиугольника, причём F будет большим отрезком для H , разделённой в крайнем и среднем отношении («Начала», XIII, 17 следствие). Поскольку E равна стороне равностороннего треугольника, сторона же равностороннего треугольника в степени будет втрое больше BC («Начала», XIII, 12) [то, значит, E^2 втрое больше BC^2], также и $CB^2 + BD^2$ будут втрое больше CD^2 («Начала», XIII, 4), то, значит, как E^2 к CB^2 , так и $CB^2 + BD^2$ к CD^2 . Перестановкой — как E^2 к $CB^2 + BD^2$, так CB^2 к CD^2 . Как же BC^2 к CD^2 , так и H^2

* В подлиннике это это ГВ₁.

к F^2 ; ибо F есть больший отрезок для H . И значит, как E^2 к $CB^2 + BD^2$, так и H^2 к F^2 . Переставляя и обращая, — как H^2 к E^2 , так и F^2 к $CB^2 + BD^2$. Но $BC^2 + CD^2$ равны F^2 , ибо сторона пятиугольника в квадратах равна стороне шестигульника вместе со стороной десятиугольника, вписанных в тот же самый круг («Начала», XIII, 10). Значит, как H^2 к E^2 , так и $BC^2 + CD^2$ к $CB^2 + BD^2$. И значит, как H^2 к E^2 , так и при делении прямой в крайнем и среднем отношении квадрат quadriрующей квадраты всей прямой и большего отрезка будет к квадрату quadriрующей квадраты всей прямой и меньшего отрезка. И H будет стороной куба, E же — икосаэдра.

Итак, если прямая разделена в крайнем и среднем отношении, то будет, что как quadriрующая всю прямую и больший отрезок к quadriрующей всю прямую и меньший отрезок, так и сторона куба к стороне икосаэдра, вписанных в ту же самую сферу.

И нужно доказать, что [предложение 8] как сторона куба к стороне икосаэдра, так и объем *) додекаэдра к объему икосаэдра.

Действительно, поскольку равные круги охватывают и пятиугольник додекаэдра и треугольник икосаэдра, вписанных в ту же самую сферу, в сферах же равные круги одинаково отстоят от центра **, то, значит, опущенные из центра сферы на плоскости кругов перпендикуляры будут равны и попадут в центры этих кругов. Таким образом, проведенные из центра сферы к центру круга, охватывающего и треугольник икосаэдра и пятиугольник додекаэдра, перпендикуляры будут равны. Значит, пирамиды, имеющие основаниями пятиугольники додекаэдра, и пирамиды, имеющие основаниями треугольники икосаэдра, будут равновысокими ***). Равновысокие же пирамиды будут друг к другу, как основания («Начала», XII, 6). Значит, как пятиугольник к треугольнику, так и пирамида, основание которой пятиугольник, вершина же центр сферы, к пирамиде, имеющей основанием треугольник, вершиной же центр сферы. И значит, как двенадцать пятиугольников к двадцати треугольникам, так и двенадцать пирамид, имеющих пятиугольные основания к двадцати пирамидам, имеющим треугольные основания. И двенадцать пятиугольников составляют поверхность додекаэдра, двадцать же треугольников — поверхность икосаэдра. Значит, будет, что как поверхность додекаэдра к поверхности икосаэдра, так и 12 пирамид, имеющих пятиугольные основания к двадцати пирамидам, имеющим треугольные основания. И 12 пирамид, имеющих пятиугольные основания, составляют объем додекаэдра, двадцать же пирамид, имеющих треугольные основания, — объем икосаэдра.

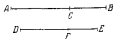
*) το στερόν — в «Началах» употребляется в смысле «тело».

**) Это доказывается в «Сферике» Феоdosия, книга I, предложение 6.

***) Isosceles — тот же термин, что в книге XII «Начал».

И значит, как поверхность додекаэдра к поверхности икосаэдра, так и объем додекаэдра к объему икосаэдра. Как же поверхность додекаэдра к поверхности икосаэдра, так по доказанному и сторона куба к стороне икосаэдра (предложение 6). И значит, как сторона куба к стороне икосаэдра, так будет и объем додекаэдра к объему икосаэдра.

А что две прямые, разделенные в крайнем и среднем отношении, будут находиться в вышележенной пропорции, мы докажем так (черт. 10):



Черт. 10.

Разделим AB в крайнем и среднем отношении в C и пусть больший её отрезок будет AC . Подобным же образом разделим и DE в крайнем и среднем отношении в F , и пусть больший её отрезок будет DF . Я утверждаю, что как вся AB к AC , так и вся DE к большему отрезку DF .

Действительно, поскольку $AB \times BC$ равно AC^2 , а $DE \times EF$ равно DF^2 , то, значит, будет, что как $AB \times BC$ к AC^2 , так и $DE \times EF$ к DF^2 . И значит, как четырежды $AB \times BC$ к AC^2 , так и четырежды $DE \times EF$ к DF^2 . И, «присоединив», как четырежды $AB \times BC$ к AC^2 к AC^2 , так и четырежды $DE \times EF$ к DF^2 к DF^2 :

$$\frac{4AB \cdot BC + AC^2}{AC^2} = \frac{4DE \cdot EF + DF^2}{DF^2}.$$

Таким образом («Начала», II, 8), и как квадрат вместе взятых AB , BC к AC^2 , так и квадрат вместе взятых DE , EF к DF^2 :

$$\frac{(AB + BC)^2}{AC^2} = \frac{(DE + EF)^2}{DF^2}.$$

И в первой степени, как $AB + BC$ вместе с AC , т. е. две AB к AC , так и $DE + EF$ вместе с DF , т. е. две DE к DF . И для половины, как AB к AC , так и DE к DF .

Если какая-нибудь прямая разделена в крайнем и среднем отношении, то сторона куба к стороне икосаэдра имеет то отношение, в каком quadriрующая квадраты всей прямой и большего отрезка находится к quadriрующей квадраты всей прямой и меньшего отрезка. Если же, кроме того, доказано, что как сторона куба к стороне икосаэдра, так и поверхность додекаэдра к поверхности икосаэдра, вписанных в ту же самую сферу,

а также, что

как поверхность додекаэдра к поверхности икосаэдра, так и сам додекаэдр к икосаэдру

вследствие того, что один и тот же круг охватывает и пятиугольник додекаэдра и треугольник икосаэдра, то ясно, что если в одну и ту же сферу впишем додекаэдр и икосаэдр, то они будут находиться в отношении, в каком для любой

прямой, разделенной в крайнем и среднем отношении, будет quadriрующая квадраты всей прямой и большего отрезка к quadriрующей квадраты всей прямой и меньшего отрезка.

Так вот, если всё это нами усвоено, то ясно, что если в ту же самую сферу будут вписаны додекаэдр и икосаэдр, то додекаэдр будет находиться к икосаэдру в отношении, как quadriрующая всей прямой, разделенной в крайнем и среднем отношении, и ее большего отрезка к quadriрующей всей прямой и меньшего отрезка. Действительно, если как додекаэдр к икосаэдру, так и поверхность додекаэдра к поверхности икосаэдра, то-есть, как сторона куба к стороне икосаэдра, как же сторона куба к стороне икосаэдра, так будет при делении какой-нибудь прямой в крайнем и среднем отношении quadriрующая всей прямой и большего отрезка к quadriрующей всю и меньший отрезок, то, значит, как додекаэдр к икосаэдру, вписанному в ту же самую сферу, так и при делении какой-нибудь прямой в крайнем и среднем отношении quadriрующая всей прямой и большего отрезка к quadriрующей всей прямой и меньшего отрезка (1).



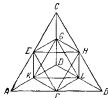
КНИГА ПЯТНАДЦАТАЯ

[Предложение 1.] В данный куб вписать пирамиду (черт. 1).
 Пусть $ABCDEFGH$ будет данный куб, в который надо вписать пирамиду. Соединим AC , AE , CE , AG , EG , GC . Ясно, что треугольники AEC , AGE , AGC , GCE будут равносторонними, ибо их стороны являются диагоналями квадратов. Значит, $AECG$ будет пирамидой; и она вписывается в данный куб.

[Предложение 2.] В данную пирамиду вписать октаэдр (черт. 2).



Черт. 1.



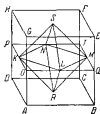
Черт. 2.

Пусть данная пирамида, в которую нужно вписать октаэдр, будет $ABCD$ и вершина её в точке D . Разделим AB , AC , AD , BD , DC пополам в точках E , F , H , G , K , L и соединим GK , GL , EF , FH , а также и остальные. И поскольку AB вдвое больше каждой из GK , HF , то, значит, GK будет равна и параллельна HF . Подобным же образом и GH будет равна и параллельна FK . Значит, $GKFH$ будет равносторонним. Я утверждаю, что и прямоугольным. Действительно, если из KL опустим перпендикуляры на плоскости $EFBH$, $PCFH$, $EFCK$, KLH (sic!), то подобным же образом докажем, что (треугольники, стоящие) над квадратом $GKFH$, равны сторонами*).

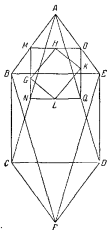
[Предложение 3.] В данный куб вписать октаэдр (черт. 3).

*) Текст доказательства этого предложения явно испорчен. Нет никакой нужды доказывать, что $GKFH$ будет квадратом, так как то обстоятельство, что треугольники EOK , EOH , EHF , EFK и LGK , LGH , LHF , LFK равносторонни, уже достаточно для того, чтобы многогранник $EFONHKL$ был бы октаэдром.

Пусть данный куб будет $ABCDEFGH$; возьмём центры K, L, M, N вертикальных квадратов и соединим KL, LM, MN, NK . Я утверждаю, что $KLMN$ будет квадратом. Проведём через K, L параллели QO, PO . Поскольку PO вдвое больше OK , QO же OL , то KO равна OL . Вследствие того же и MQ равна QL . Значит, KL^2 вдвое больше OL^2 . Вследствие того же и ML^2 вдвое больше LQ^2 . Значит, KL^2 равен ML^2 . Значит, $KLMN$ будет равно-сторонним. И очевидно, что и при-моугольным. Возьмём центры R, S двух квадратов BD и FH и соединим $RL, RM, RK, RN, SK, SL, SM, SN$. И очевидно, что образу-ющие октаэдр треугольники будут равно-сторонними, ибо мы пока-жем это тем же самым рассу-ждением *).



Черт. 3.



Черт. 4.

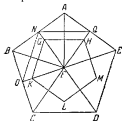
[Предложение 4.] В данный октаэдр вписать куб (черт. 4).

Возьмём центры H, G, K, L кругов, описанных около тре-угольников ABC, ACD, ADE, ADE , и соединим HG, HK, GL, LK . Я утверждаю, что $HGKL$ будет квадратом. Через H, G, K, L параллельно BC, BE, CD, DE проведём MO, MN, NQ, QO . Поскольку треугольник ABC равносторонний, то прямая, соеди-няющая A с центром G круга, описанного около треугольника ABC , делит пополам угол A треугольника ABC . Значит, NO равна MO . На том же основании и HO равна MO . Значит, и GO равна MO , так как OM равна MO . И угол HMO прямой; из этого ясно, что HO равна HK **). На том же основании будут

*). Повидимому, тем же самым, которое содержится во вто-ром предложении.

**). Автор опускает доказательство, что $OH = OK = OQ$.

расти и остальные стороны. Теперь, так как $HGKL$ параллелограмм, то он будет лежать в одной плоскости. И поскольку каждый из углов HGM , NGL будет половиной прямого, то, значит, оставшийся угол HGL будет прямым. Точно так же и остальные углы. Значит, $HGKL$ есть квадрат. Значит, возможно, взяв первоначально центры H , G , K , L и проведя параллели AN , NQ , QA , OM , соединить HG , GL , LK , KH и назвать $HGKL$ квадратом. Если же мы возьмём центры и остальных треугольников и таким же образом их соединим, то докажем, что и остальные будут квадратами, и получим куб, вписанный в данный октаэдр.



Черт. 5.

[Предложение 5.] В данный икосаэдр вписать додекаэдр (черт. 5).

Возьмём пятиугольник $ABCDE$ икосаэдра *) и центры H , G , K , L , M кругов, описанных около треугольников AFE , AFB , BFC , FCD , DFE , и соединим HG , GK , KL , LM , MH . И затем соединим FN , FG , FK продолжим до Q , N , O . Тогда FA , AL , BC разделится в точках Q , N , O пополам. И как NQ к NO , так и HG к GK . Значит, GH равна GK . Подобным

же образом докажется, что будут равны и остальные стороны пятиугольника $HGKLM$. Я утверждаю, что он и равноугольный. Действительно, так как две NQ , NO параллельны двум HG , GK , то они заключают равные углы, и очевидно, что и другие. Вообразим опущенный из F на плоскость пятиугольника $ABCDE$ перпендикуляр, который упадёт в центр круга, описанного около пятиугольника. Если же мы соединим F с точкой, в которую упадёт перпендикуляр из F , и через G проведём параллельную ей прямую, то ясно, что она встретится с перпендикуляром из F , и что проведённая из G параллель образует прямой угол с опущенным из F перпендикуляром. Затем, если мы соединим F и H с центром круга около пятиугольника $ABCDE$ и с точкой, в которой проведённая из G прямая встречается с соединяющей F («и центр круга около $ABCDE$ »), то (обе эти соединяющие) будут образовывать с последней прямые углы, откуда видно, что пятиугольник $HGKLM$ будет в одной плоскости... **).

*) Подразумевается пятиугольник, на котором строится пять треугольников, образующих одну из вершин икосаэдра (на чертеже F).

**) На этом обрывается изложение, которое нельзя назвать страдающим излишней полнотой и точностью, как и вообще весь материал книги XV (1).

Нам нужно знать, что, если кто-нибудь нас спросит: «сколько сторон имеет икосаэдр?», то мы ответим так: ясно, что икосаэдр ограничивается двадцатью треугольниками, и что каждый треугольник ограничен тремя прямыми, мы должны перемножить двадцать треугольников на число сторон в треугольнике; получится шестьдесят, половина которых будет тридцать. Точно так же итем и относительно додекаэдра; так как додекаэдр ограничен двенадцатью пятиугольниками, и затем каждый пятиугольник имеет пять сторон, то сделаем двенадцать раз пять; получится шестьдесят. Возьмём затем половину; будет тридцать. Почему же мы берём половину? Потому что каждая сторона, будет ли то треугольника, пятиугольника или квадрата, как в случае куба, берётся два раза. Точно так же тем самым способом ты найдёшь число сторон куба, пирамиды или октаэдра, сделав с ними то же самое.

Если же ты, кроме того, захочешь узнать число вершин каждого из пяти тел, то, сделав опять то же самое, раздели на число граней, ограничивающих одну из вершин тела, так, например, поскольку вершину икосаэдра ограничивают пять треугольников, то дели на пять; получатся двенадцать вершин икосаэдра. В случае же додекаэдра вершину ограничивают пять пятиугольников; дели на три, и получишь двадцать принадлежащих додекаэдру вершин. Точно так же ты найдёшь число вершин и для остальных (2).

Справившись, каким образом для пяти правильных тел определить наклон одной какой-нибудь из ограничивающих это тело плоскостей, именно той частью, который имеют друг к другу плоскости, ограничивающие каждое из этих тел. Решение этого вопроса, предложенного по инициативе Исихора, великого нашего учителя, заключается в следующем. У куба вполне очевидно, что ограничивающие его плоскости пересекают друг друга под прямым углом. Что же касается пирамиды, то мы возьмём одну её треугольную грань и из концов одной стороны, как из центров, опишем дуги раствором, равным перпендикуляру, опущенному из вершины на основание, и пусть эти дуги пересекут друг друга; тогда прямые, соединяющие это сечение с центрами, будут заключать наклон ограничивающих пирамиду плоскостей. Что касается октаэдра, то если мы построим на стороне треугольника квадрат и из концов диагонали, как из центров, опишем дуги раствором, точно так же равным высоте треугольника, то опять прямые, соединяющие общее сечение этих дуг с центром, будут содержать недостающую до двух прямых часть искомого наклона. Что же касается икосаэдра, т. е. построив на стороне треугольника правильный пятиугольник, проведём прямую, стягивающую две его стороны, и, проведя из её концов, как из центров, дуги раствором, равным той же самой высоте треугольника, мы найдём, что соединяющие точку общего пересечения этих дуг с центрами прямые будут точно

так же заключать недостающую до двух прямых часть наклона плоскостей икосаэдра. Что же касается додекаэдра, то если мы возьмём один пятиугольник, проведём точно так же прямую, стягивающую две его стороны, и из её концов, как из центров, опишем дуги раствором, равным длине перпендикуляра, опущенного из её середины на параллельную ей сторону пятиугольника, то прямые, соединяющие точку, где встречаются эти дуги, с центрами, точно так же будут содержать недостающую до двух прямых часть наклона плоскостей додекаэдра.

Так вот вышеупомянутый славнейший муж дал такую теорию относительно вышеописанного, причём доказательство для каждого случая представлялось ему вполне ясным. Но чтобы вполне вывести заключающуюся в них доказываемую теорию, я изложил ход рассуждений в каждом случае и прежде всего для пирамиды.



Черт. 6.

Вообразим пирамиду $ABCD$, ограниченную четырьмя равносторонними треугольниками (черт. 6), причём основанием будем считать ABC , вершиной же D . Разделив сторону AD пополам в E , соединим BE и EC . И так как треугольники ADB , ADC равносторонни и AD разделен пополам, то, значит, BE и CE будут опущенными на AD перпендикулярами. Я утверждаю, что угол BEC будет острым. Действительно, поскольку AC больше AE , то AC^2 будет вчетверо больше AE^2 . Но AC^2 равен AE^2 и EC^2 ; таким образом, AC^2 имеет к CE^2 отношение, как 4 к 3. И CE равна EB ; значит, BC^2 будет меньше $BE^2 + EC^2$. Значит, угол BEC будет острым («Начала», II, 13). Теперь, поскольку AD является общим сечением двух плоскостей ABD , ADC и под прямыми углами к этому общему сечению в каждой из плоскостей проведены прямые BE , EC и они заключают острый угол, то, значит, угол BEC будет наклоном этих плоскостей («Начала», XI, определение 6). И он дан; ибо заданы и BC , являющаяся стороной треугольника, и каждая из BE , EC , являющаяся высотой равностороннего треугольника. Теперь дуги, описанные из центров B , C , то-есть концов одной стороны, раствором, равным высоте другого треугольника, пересекут друг друга в точке E , и прямые, соединяющие ее с B , C , будут заключать наклон плоскостей; а это и было то, что мы сказали выше. А что описанные из центров B , C раствором, равным высоте данных треугольников, круги пересекут друг друга, вполне ясно, ибо каждая из BE , EC больше половины BC . А круги, описанные из центров B , C раствором, равным половине BC , будут касаться друг друга; если раствор меньше, то они ни касаются, ни пересекаются друг друга; если же раствор больше, то всегда пересекаются. И вот таким образом для пирамиды ход рас-

суждения представляется вполне ясным и соответствующим указательству.

Затем вообразим на квадрате $ABCD$ пирамиду, имеющую вершину E и ограничивающие её треугольники (кроме основания) равнобедренные (черт. 7). Тогда пирамида $ABCDE$ будет половиной октаэдра. Разделим одну из сторон AE одного треугольника пополам в F и соединим BF , DF . Значит, BF , DF будут равными и перпендикулярными к AE . Я утверждаю, что угол BFD будет тупым. Действительно, соединим BD . И поскольку $ABCD$ квадрат и BD его диаметр, то BD^2 вдвое больше DA^2 . Но DA^2 имеет к DF^2 отношение, как уже было сказано выше, как 4 к 3. И значит, BD^2 к DF^2 имеет отношение, как 8 к 3. Но DF равна FB . Значит, BD^2 будет больше $BF^2 + FD^2$. Значит, угол BFD будет тупым («Начала», II, 12). И так как AE

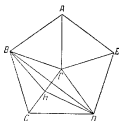


Черт. 7.

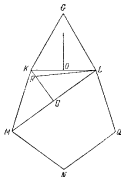
есть общее сечение двух пересекающихся друг друга плоскостей ABE , ADE и к ней под прямыми углами в каждой из плоскостей проведены BF , FD , заключающие тупой угол, то, значит, BFD будет недостающей до двух прямых частью наклона плоскостей ABE , ADE («Начала», XI, определение 6). Значит, если угол BFD дан, то дан и упомянутый наклон. Теперь, поскольку задан треугольник октаэдра, и AD является одной из сторон октаэдра, и на ней построен квадрат AC , то задана и BC , являющаяся диаметром квадрата. Но также даны и BF , FD — высоты треугольника. Таким образом, дан и угол BFD . Значит, если на стороне треугольника мы построим квадрат, как, например, AC , и, соединив диаметр BD , из центров B , D опишем круги раствором, равным высоте рассматриваемого треугольника, то они пересекут друг друга в F , и прямые, соединяющие F с обоими центрами, будут заключать угол BFD , который, как сказано, представляет недостающую до двух прямых часть наклона этих плоскостей. И из этого ясно, что каждая из BF , FD будет больше половины BD , и вследствие этого при инструментальном построении оба круга necessarily пересекут друг друга. И из доказательства стало ясным, что BD к DF имеет в степени отношение, как 8 к 3; и BD в степени будет в четыре раза больше своей половины. Таким образом, каждая из BF , FD будет вследствие этого больше половины BD . И вот это относительно октаэдра.

Что же касается икосаэдра, то вообразим равнобедренный и равноугольный пятиугольник $ABCDE$ (черт. 8) и из нем пирамиду, имеющую вершину F , такую, что ограничивающие её треугольники были бы равнобедренными. Тогда пирамида $ABCDE$ будет частью икосаэдра. Оту сторону FC одного из треугольников разделим пополам в H и соединим BH , HD , которые будут равными и перпендикулярными к CF . Я утверждаю, что

угол BHD будет тупым. И это само по себе очевидно. Действительно, соединяющая BD стягивает тупой угол BCD пятиугольника. Угол же BHD больше её (Начала, I, 21), ибо BH с HD будут меньше, чем BC с CD . Так вот подобно предыдущему, докажем, что угол BHD будет недостающей до двух прямых частью наклона треугольников BFG и CFD . Если же эта часть дана, то будет даным и наклон градусе икосаэдра. Действительно, если мы на стороне треугольника икосаэдра построим пятиугольник, то поскольку задана стягивающая две стороны пятиугольника, как на рисунке чертежа BD , а также и высоты BH , HD треугольников, то будет дан и угол BHD . Если же из концов стягивающей две стороны пятиугольника прямая, например, BD ,



Черт. 8.



Черт. 9.

как из центров, опишем круги раствором, равным высоте треугольника, то они пересекаются друг с другом, например в H , и соединяющие H с B , D прямые будут заключать недостающую до двух прямых часть наклона обеих плоскостей. И также и здесь из чертежа ясно, что каждая из BH , HD будет больше половины BD что может быть доказано и при инструментальном построении.

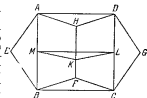
Вообразим отдельно равносторонний треугольник GKL , на KL построим пятиугольник $KMNQL$, соединим ML и проведем GO — высоту треугольника GKL (черт. 9). Я утверждаю, что GO будет больше половины ML . Из K опустим на ML перпендикуляр MP , и поскольку KLP будет больше трети прямого угла, то есть угла KGO , построим угол PLR , равный KGO . Значит, PL будет высотой равностороннего треугольника, сторона которого RL . Таким образом, RL^2 имеет к LP^2 отношение, как 4 к 3. Но KL больше LR . Значит, KL^2 имеет к LP^2 отношение большее, чем 4 к 3 (Начала, V, 8). Также и к GO^2 он имеет

отношение, как 4 к 3. Значит, KL имеет к LP большее отношение, чем к GO . Значит, GO будет больше LP («Начала», V, 10).

Относительно же додекаэдра дело обстоит так: вообразим один из квадратов того куба, на котором строится додекаэдр (ср. «Начала», XIII, 17), положим $ABCD$ и две плоскости додекаэдра $AEBFH$, $HDCGF$ (черт. 10). Вот я утверждаю, что и в этом случае наклон обеих пятиугольников является данным. Разделим FH пополам в K , проведем из K в каждой из плоскостей KL и KM под прямыми углами к FH и соединим ML .

Я говорю, во-первых, что угол MKL будет тупым. Действительно, в книге XIII «Начал» (XIII, 17) относительно построения додекаэдра доказано, что перпендикуляр, опущенный из K на квадрат $ABCD$, будет половиной стороны пятиугольника. Таким образом, он будет меньше половины ML , а вследствие этого угол MKL будет тупым^{*)}.

В этой же самой теореме одновременно доказано, что KL^2 будет равняться квадрату половины стороны куба вместе с квадратом половины стороны пятиугольника. Таким образом, те же самые KL и KM , которые равны между собой, будут больше половины ML ^{**)}. Значит, если угол MKL дан, то, конечно, будет дана и величина наклона рассматриваемых плоскостей, которая будет несложнейшей из двух прямых частей. Далее, поскольку сторона квадрата $ABCD$ составляет две стороны пятиугольника, пятиугольник же задан, то,



Черт. 10.

^{*)} Если упомянутый перпендикуляр будет меньше $\frac{ML}{2}$, то $MK^2 < \frac{ML^2}{4} + \frac{ML^2}{4}$ и $MK^2 + KL^2 < ML^2$, что и доказывает высказанное положение. Что же касается утверждения, что длина упомянутого перпендикуляра будет меньше $\frac{1}{2} ML$, то это следует из того, что сторона BE пятиугольника будет большим отрезком при делении AB в крайнем и среднем отношении («Начала», XIII, 8), т. е. будет составлять $\frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0,615$ от AB («Начала», XIII, 1; таким образом, его половина, равная $0,307 AB$ или $0,307 ML$, будет, конечно, меньше $\frac{1}{2} ML$.

^{**) Уведомленный теорией додекаэдра, автор не заметил, что это просто следует из предложения 20 книги I «Начал».}

значит, дана и ML . Даны также и обе MK , KL , ибо они являются перпендикулярами из середины, стягивающей две стороны прямой на параллельную ей сторону FH пятиугольника; значит, будет дан и угол LKM , представляющий, как было сказано, недостающую до двух прямых часть искомого наклона. Значит, он хорошо сказал относительно инструментального построения, что нужно будет в заданном пятиугольнике провести стягивающую две стороны соединительную прямую, которая будет равной стороне куба, и затем из ее концов, как из центров, раствором, равным опущенному из ее середины перпендикуляру на параллельную ей сторону пятиугольника (на чертеже это будут KL и KM), описать окружности и точку встречи этих окружностей соединить с центрами прямыми, которые и будут заключать недостающую до двух прямых часть наклона рассматриваемых плоскостей. А что перпендикуляр KL будет больше половины ML *), это, как уже говорилось, одновременно доказано в «Началах».

*) Это необходимо для того, чтобы доказать, что упомянутые две окружности пересекаются.



КОММЕНТАРИИ

Д. Д. Мордухай-Болтовского





КОММЕНТАРИИ К КНИГЕ XI

1. Тела и поверхности. Об определении тела (определение 1) следует сказать то же, что было сказано мной об определениях точки, линии и поверхности в комментариях к первой книге «Начал». Это — определение, логически не действующее, но тем не менее не лишённое интереса с исторической и методической точек зрения.

Характеристика тела длиной, шириной и глубиной, конечно, идёт не от Евклида. Эту характеристику можно найти и у Платона¹⁾ и в «Метафизике» Аристотеля²⁾.

Но находится ли у них указание на *трёхмерные пространства*? — Думаю, что нет. В античное время нашего понятия о пространстве не существовало. Едва ли можно считать правильным перевод *συστοιχία* Аристотеля словом *измерение*. Ведь для нас измерение прежде всего — *число*, но античной мысли совсем чужды арифметизация, т. е. выражение всех геометрических величин числами. Поэтому слово *измерение* здесь лучше заменять *протяжением*. Понятие трёхмерного пространства становится употребительным с установлением понятия о *координатах*, т. е. очень поздно, пожалуй, со времён даже не Декарта, а Канта и Эйлера, когда рядом с ним встаёт и четырёхмерное — не воображаемое, а только мыслимое — пространство. К тому же следует отметить, что и не все античные авторы видят только три телесных протяжения.

Тот же Аристотель в «Физике» даёт³⁾ уже вместо четырёх 6 протяжений, соответствующих направлениям: спереди, сзади, сверху, снизу, справа и слева.

Об евклидовых телесных фигурах следует повторить то же, что нами сказано о плоских.

Евклидов треугольник не треугольник современной проективной геометрии, а *часть плоскости*, ограниченная тремя не

¹⁾ «Софист», 235 D (Сочинения, русск. перевод Карпова, ч. 6, СПб, 1879).

²⁾ «Метафизика», 1020 a 13, 11 (русск. перевод А. В. Кубицкого, М., 1934).

³⁾ «Физика», 208 b 13 и след. (русск. перевод В. И. Карпова, кн. IV, 1, стр. 70, М., 1937).

пересекающимися в одной точке прямыми. Точно таким же образом и евклидов многогранник есть то, что ограничивается плоскостями. Однако тут и встречается серьезное затруднение: в треугольнике ограничивается часть плоскости, но что же ограничивается в тетраэдре? Мы сказали бы — часть пространства, но отвлеченное пространство еще не мыслилось античными математиками.

С одной стороны, Евклид, уже по аналогии с плоскими фигурами, мыслит многогранник *заполненным*, а не полым, но он нигде не говорит, чем он заполнен.

Вероятно, именно эти мысли и заставляли некоторых античных мыслителей, начиная уже с Платона, мыслить *атомы-многогранники* полыми и даже более того — состоящими только из ребер, вроде проволочных моделей. Но против такого взгляда выступал Аристотель. Здесь интересно отметить, что Платон говорит о многогранниках, *заполненных* и *полых*, как о различных предметах.

Еще несколько слов о борьбе двух точек зрения, между которыми колеблется Аристотель. При первой идут (испольбая современную терминологию) от *многообразия высшего порядка к многообразию низшего*, выставляя последнее как границу первого. При второй идут в обратном направлении — от *многообразия низшего измерения к многообразию высшего*, или составляя последнее из множества первых, или заставляя первые образовывать вторые. Сам Евклид никогда не составляет из точек линий, из линий поверхностей, из поверхностей тел, но в своих геометрических определениях он образует цилиндр, конус и сферу движением плоских фигур, мысля вместе с тем точку как границу линии, линию как границу поверхности, поверхность как границу тела.

Герон в Definitiones⁴⁾ соединил обе точки зрения, утверждая в II-м определении, что тело ограничивается поверхностью и вместе с тем, что тело получается движением поверхности.

2. Перпендикулярность. Евклид определит перпендикулярность *прямой к плоскости* так же, как и мы, а именно: перпендикулярностью данной прямой ко всем прямым на плоскости, пересекающим данную прямую. Но мы считаем, что такое определение надо *оправдать*, т. е. следует доказать, что класс определяемых прямых не *пустой* или не нулевой. Но Евклид ни в этом случае, ни в других аналогичных этого не делает. Я уже говорил, что все его определения представляют только *описания* геометрических фактов, им наблюдаемых. Такая прямая всегда наблюдается, и этого уже достаточно.

Для нас оправданием определения 3 является евклидово предположение 4 о том, что прямая, перпендикулярная к двум прямым на плоскости, перпендикулярна и ко всем другим прямым этой плоскости. Мы можем скорее убедиться в существовании

⁴⁾ Сочинения Герона изданы Тейхнером (Leipzig, 1899—1912).

прямой, перпендикулярной к *двум* прямым, чем в существовании прямой, перпендикулярной к *бесконечному* множеству прямых.

Но не следует видеть в предложении 4 попытку Евклида дать такое *оправдание* определения. У Евклида это предложение выставляется только затем, чтобы в дальнейшем из перпендикулярности к двум прямым выводить перпендикулярность к плоскости. При этом ему оказывается нужным ещё предложение 5 о том, что пересекающиеся прямые, перпендикулярные к данной прямой, лежат в одной плоскости.

Здесь следует ещё отметить, что в поисках лучших определений плоскости некоторые математики, например, Крель⁵⁾ и Фурье⁶⁾, остановились на определении плоскости как поверхности, образуемой прямыми, перпендикулярными к одной прямой, обращая таким образом евклидово предложение 5 в определение плоскости.

В то время как евклидово определение перпендикулярности прямой к плоскости не отличается от нашего, определение *перпендикулярности двух плоскостей* у него совсем другое. По Евклиду плоскость P перпендикулярна к плоскости Q , если прямая MN в плоскости P , перпендикулярная к прямой AB пересечения P и Q , будет также перпендикулярна к Q , и наоборот: если прямая LN в плоскости Q , перпендикулярная к AB , будет перпендикулярна и к P . Определение это также не оправдывается. В нём следует доказать, что вторая часть представляет следствие первой.

Мы устанавливаем сначала понятие о *двугранном* угле вообще, затем о *прямом* двугранном угле, и плоскостями перпендикулярными считаем те, которые образуют прямой двугранный угол.

Интересно отметить, что евклидово определение перпендикулярности двух плоскостей, требующее перпендикулярности одной прямой на P к Q и одной прямой на Q к P , переносится и на *четырёхмерное пространство*. Перпендикулярность *общего* типа именно такова. В четырёхмерном пространстве плоскости пересекаются не по прямой, а вообще в одной точке, причём если они не попадают в трёхмерное пространство (гиперплоскость), то можно говорить о перпендикулярности только в том смысле, что только *одна* прямая P перпендикулярна ко *всем* прямым на Q и только одна прямая в Q перпендикулярна ко *всем* прямым на P .

3. Углы. Прежде всего обращаю внимание на то, что у Евклида угол — это наклон не *плоскостей*, граней (как мы это мыслим), а *прямых*, ребер.

⁵⁾ «Zur Theorie der Ebenen, Crelle's Journal, Bd. 45 (1845).

⁶⁾ Schooten, Inhalt und Methode der planimetrischen Unterricht, Leipzig, 1890.

Согласно Л. Бертрану⁷⁾ телесный угол — это часть пространства, ограниченная плоскостями, пересекающимися в одной точке. Евклид же мыслит наклон только прямых. Правда, он потом говорит и о наклоне плоскостей, но не мыслит этот наклон как двугранный угол, а *отождествляет* его с соответствующим линейным углом, т. е. наклон плоскостей представляет как наклон некоторых линий.

При евклидовом понимании наклона плоскостей теоремы о пропорциональности двугранных и соответствующих им линейных углов совершенно отпадают.

4. Равенство тел. В особенности много обсуждались определения 10 и 11 Евклида. В них видели большие недостатки, ставившие в вину Евклиду. Но при их обсуждении всегда *проектировали частящее в прошлое*, обнаруживая непонимание самой постановки проблемы у Евклида.

Постоянно забывалось, что Евклид, как я уже много раз подчеркивал, понимал *равенство* большей частью в смысле *равновеликости*. На первый взгляд кажется, что здесь, в стереометрии, он как будто отступает от этого и равенство понимает в смысле *одинаковости форм и размеров при различных положениях*. Опичко более глубокий анализ вскрывает, что и здесь Евклид остается Евклидом.

Для Евклида два *симметричных* тетраэдра с равными гранями равны; для Роберта Симсона⁸⁾ они не равны, потому что они *не совмещаются*.

По Евклиду равенство телесных фигур вовсе не определяется совмещением. Треугольники можно совместить, передвинув треугольник *по плоскости* или перевернув его *на плоскость*, но нельзя совместить октаэдр с октаэдром, каким-то чудесным образом проникнув одним внутрь другого. Такая операция могла бы возбудить только насмешку со стороны софиста. Доказательства Симсона, о которых мы будем ниже говорить, с евклидовой точки зрения *неприемлемы*.

В сущности Евклид оказался в таком же положении, что и Гильберт, отказавшийся от евклидова положения на плоскость, вынуждаемый к этому формально логическим построением геометрии.

Гильберт выставил аксиомой то, что вовсе не является очевидной истиной, а именно, первый случай равенства треугольников.

Симсон настаивает на том, что определение 10, хотя бы и с коррективом, состоящим в отбрасывании симметрических фигур, нельзя принять за аксиому, что его следует доказать. Мы приводим ниже это доказательство, но повторяем, что для Нацала оно неприемлемо. Симсон говорит больше. Он подчёр-

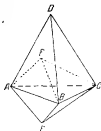
⁷⁾ L. Bertrand, Développement nouveau de la partie élémentaire des Mathématiques, Genève, 1778.

⁸⁾ R. Simson, Euclidis elementorum libri priores, Glasgae, 1756. Его же, The Elements of Euclid, Notes, Glasgae, 1752.

кивает, что доказать это определение можно только в случае *трёхгранных углов*.

Во времена Симсона неизвестна была теорема Коши о многогранниках, согласно которой развертка многогранника вполне определяет многогранник.

Ещё одно замечание — о возможности построения двух многогранников с равными гранями, но неравными в смысле Евклида (т. е. не равнозвездными). На одном и том же основании ABC Симсон строит две пирамиды $ABCD$ и $ABCE$, получая, таким образом, *бипирамиду* (черт. 1). Затем внутри $ABCD$ он строит симметричную $ABCE$ пирамиду $ABCF$. Тогда два тела — бипирамида и пирамида с углублением — будут иметь равные грани, но не равные объёмы. Во все рассуждения Евклида, относящиеся к многогранникам, следует внести ограничение *включая*, т. е. расположения всего многогранника по одну сторону от продолженных граней.



Черт. 1.



Черт. 2.

5. Три теоремы Роберта Симсона. Приведем теперь теоремы Симсона, обосновывающие определение Евклида (с упомянутым выше ограничением).

1. Если плоские углы одного телесного угла соответственно равны плоским углам другого, то заключающие эти углы плоскости будут равно наклонены между собой.

Пусть A и B два телесных угла с соответственно равными плоскими углами (черт. 2.)

$$\angle CAD = \angle FBG, \angle CAE = \angle FBH, \angle EAD = \angle HBG.$$

Докажем, что плоскости ACE и BFH будут равно наклонены соответственно к ACD и BFG .

Откладываем $BM = AK$ и восстанавливаем перпендикуляры KI и KL к AC и MP и MN к BF . Соединим IL и NP ; нам нужно будет доказать, что в треугольниках KIL и MPN углы при вершинах K и M будут соответственно равны.

Из равенств прямоугольных треугольников AKI и BMP (равные катеты AK и BM и углы при A и B) получаем:

$$KI = MP, AI = BP.$$

Затем из равенства прямоугольных треугольников AKL и BMN аналогично находим:

$$KL = MN, AL = BN.$$

Теперь из равенства треугольников ALI и BNP ($AL = BN$, $AI = BP$, $\angle LAI = \angle NBP$) убеждаемся в равенстве сторон

$$LI = NP,$$

а отсюда следует равенство треугольников KLI и MNP , а значит, и углов при K и M .

Аналогично проведём доказательство и для двух остальных пар плоскостей.

II. Если два телесных угла ограничены равными и одинаково расположенными плоскими углами, то эти телесные углы могут быть смещены друг с другом.

Теорема легко доказывается, если совместить вершины A и B , затем грани AKI и BMP ; тогда при одинаковости наклонов граней AKI с AKL и BMP с BMN совпадут и грани AKL с BMN , а затем и ALI с BNP .

Отсюда сейчас же выводится, что:

III. Тела, ограниченные тем же числом равных, подобных и подобно расположенных фигур при ограничении углами не более чем трёх плоскостей, равны и подобны.

6. Подобие тел. В определении 9 выступает дисгармония с определением подобия плоских фигур в шестой книге «Начал» (определение 1). Там подобные фигуры определяются как такие, которые имеют *соответственно равные углы и стороны, заключающие равные углы, пропорциональным*.

Условие подобия должно было бы здесь состоять не только в подобии граней, но и в равенстве трёхгранных углов.

Рассуждая так же, как в отношении равенства, легко увидим, что в случае трёхгранных углов условие, относящееся к углам, можно выпустить, но это, как и для многоугольников, нельзя выпустить в случае многогранных углов.

В истории теории подобия мы можем отметить следующие этапы:

1) Сперва подобие определяется *одинаковостью формы*. Равенство углов и отношений сторон является сперва *не определением, а свойством*, выводимым особой аксиомой. Но затем оно обращается в определение. Следует отметить, что рационалисты, взирая на Геометрию как на *учение о пространстве*, возвращаются к этому аристотелеву определению подобия²⁾.

Мы видели в комментарии к книге VI, что лейбницизмско-вольфианское³⁾ определение подобия по существу сводится к

²⁾ «Метафизика», кн. 10, гл. 3.

³⁾ Д. Д. Мордухай-Болтовской, Теория подобия Хр. Вольфа («Вестник опытной физики и элементарной математики», 1915).

аристотелевскому определению является логически не действующим. Логический же аппарат начинает работать только с выдвижением *аксиомы о подобии фигур*, получаемых теми же построениями, произведенными над подобными элементами.

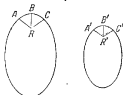
2) Последним этапом является установление *понятия о подобии и преобразованиях*. Это — точка зрения уже современной Высшей Геометрии. Подобными фигурами здесь являются те, которые преобразуются друг в друга подобным преобразованием. Но ей предшествует *промежуточная* ступень, когда подобные фигуры мыслятся как приводимые движением в такое положение, что вершины (или вообще соответствующие точки) оказываются на прямых, сходящихся в одной точке, а грани (соответствующие плоскости) параллельны. Эта точка зрения проводится в некоторых учебниках первой половины XIX в. и её можно было бы провести в «Началах», в общем, не особенно отступая от духа Евклида.

Существует ещё один подход к понятию подобия, обращающий на себя внимание потому, что он содержит в себе зародыш *почти подобия и преобразования*. Это — подход чрезвычайно богатого идеями Луи Бертрана, в новой форме, возрождающейся в итальянских учебниках настоящего времени ¹¹⁾.

Две плоские фигуры — безразлично, криволинейные или прямолинейные — мыслятся подобными, если между ними существует такое соответствие, что все прямые RA, RB, RC (черт. 3), проходящие через одну *определённую точку* R в одной фигуре, отвечают в другой прямые $R'A', R'B', R'C'$, проходящие через одну *определённую точку* R' , отвечающую R . причём так, что углы между парами соответствующих прямых равны, а соответствующие отрезки пропорциональны:

$$RA:R'A' = RB:R'B' = \dots$$

С точки зрения Высшей Геометрии подобное преобразование, во-первых, *конформно* (сохраняются углы), во-вторых, *аффинно* (сохраняются простые отношения отрезков). У Л. Бертрана эти свойства берутся только в отношении прямых, проходящих через одну определённую точку. Ему приходится *показывать*, что то же имеет место и в отношении других точек. Бертран мог бы совершенно так же определять и *подобие телесных фигур*. Но он уклоняется от этого и определяет подобие телесных фигур указанным подобием плоских, получаемых в сечении пло-



Черт. 3.

¹¹⁾ L. Bertrand, цит. соч. (см. сноску 7), гл. 3, предл. 20, гл. 6, предл. 141.

скостями, проходящими через прямую, проведенную перпендикулярно к некоторой определенной плоскости.

Конечно, и такое определение должно быть развито, как и относящиеся к плоским фигурам, а именно, следует доказать, что взятая плоскость может быть заменена произвольной.

В заключение отметим, что определение подобия Бертрава весьма близко к определению, которое даёт Кавальери в своей «Геометрии неделимых».

Если при пересечении тел системой соответственных параллельных плоскостей между этими плоскостями получаются подобные между собой сечения, то тела называются подобными.

Кавальери доказывает согласованность этого определения с евклидовым для многогранников. Оно, конечно, шире, чем евклидово, и обнимает также подобные поверхности.

Кавальери во II книге «Геометрии» доказывает весьма общую теорему: отношение друг к другу каких-либо подобных тел равно тройному отношению сходственных линий или сходственных сторон их сходственных фигур.

7. Пирамида и призма. Евклидово определение пирамиды как телесной фигуры, ограниченной *плоскостями*, которые от одной плоскости сходятся в одной точке, не удовлетворяет в настоящее время математиков. К тому же наше ухо режет и евклидов термин *плоскость*, употребляемый не в смысле безгранично продолженной плоскости, а в смысле конечной ограниченной ее части, т. е. в смысле евклидовой плоской фигуры. Мы же пользуемся теперь специальным термином «грань».

Но критики античных математиков исправляли эти определения иначе.

Герон так исправляет Евклида. Он говорит, что пирамида есть фигура, сходящаяся в одной точке, ограниченная треугольниками, с треугольным, четырехугольным и многоугольным, т. е. вообще прямолинейным основанием¹²⁾.

Но в это определение входит, во-первых, понятие *основания*, которое должно быть определено, во-вторых, пирамиду можно считать сходящейся не только в ее вершине, но и в вершинах многоугольника, служащего основанием.

Лежандр¹³⁾ даёт определение: *Пирамида есть телесная фигура, образ чьяная треугольниками, сходящимися в одной точке, и заканчивающаяся на различных сторонах плоского основания*. Но что такое *основание* — разъясняется уже после формулировки этого определения.

Это определение даёт пример *избыточного* определения, в которое входит часть признаков, выводимых из других. Следует отметить, что с методической точки зрения такие определения

¹²⁾ Heron, Definitiones, опред. 99.

¹³⁾ A. M. Legendre, *Éléments de Géométrie* (русск. перевод, СПб, 1837).

неизбежны. Другие определения можно считать лучшими, но не с методической, а только с научной точки зрения.

Хлос¹⁴ приводит в своих комментариях определение Тойлора: пирамида — многогранник, у которого все грани, кроме одной, сходятся в одной точке.

Другое определение — Раузенбергера: пирамида — телесный угол, пересеченный плоскостью.

Евклидово определение призмы как телесной фигуры с двумя разными и параллельными основаниями и с боковыми гранями — параллелограммами, не вызывает возражения, но оно должно быть оправдано, т. е. следует установить, что плоскости, проходящие через пары непараллельных сторон оснований, пересекаются по прямым параллельным.

Тейлор¹⁵ определяет призму подобно тому, как он определяет пирамиду: это многогранник, имеющий, кроме двух, все грани, параллельные одной прямой.

Здесь следует сказать, что античные математики не могли рассматривать призму как предельную форму пирамиды; такой взгляд мог возникнуть только с понятием бесконечно удаленной точки прямой.

8. Сфера. Евклидово определение сферы — чисто генетическое, указывающее, каким образом вращением полукруга производится сфера. Однако более ранним является чисто описательное определение сферы.

Так Аристотель¹⁶ определяет сферу как тело, одинаково простирающееся во все стороны от центра. Но и более поздние математики, например Герон¹⁷, говорят о сфере совершенно так же, как Евклид о круге: сфера — телесная фигура, ограниченная одной поверхностью так, что прямые линии, падающие из одной точки в точки, которые на ней лежат, равны между собой.

9. Конус и цилиндр. Для конуса и цилиндра Евклид дает чисто генетические определения, получая первый вращением треугольника, а второй — прямоугольника около одной стороны.

У Евклида мы находим конус и цилиндр, но не находим конической и цилиндрической поверхностей. Однако Аполлонию, исследующему сечения конуса, среди которых находятся парабола и гипербола, уже приходится устанавливать понятие о конической поверхности.

В первом определении он говорит¹⁸:

¹⁴) T. L. Heath, The thirteen Books of Euclid's Elements, vol. III, Cambridge, 1926, стр. 268—269.

¹⁵) Там же (см. предыдущую справку).

¹⁶) «О небе», кн. 2, гл. 14, 297а—24.

¹⁷) «Definitiones», опред. 76.

¹⁸) Apollonius Pergaeus, Opera, ed. Heiberg, 1891, Conica, кн. I, опред. 1 и 2 [Есть русск. перевод Ягодянского, «Известия Сев.-Кавк. Университета», 1928, т. III (XV)].

«если от какой-либо точки окружности круга, который не находится в одной плоскости с некоторой точкой, проводить прямые, соединяющие эту точку с окружностью, и при неподвижности точки перемещать прямую по окружности, возвращая её туда, откуда началось движение, то поверхность, описанную прямой и согласенную из двух поверхностей, лежащих в вершине друг против друга, из которых каждая бесконечно увеличивается, если бесконечно продолжать описывающую прямую, я называю *конической поверхностью*, неподвижную же точку — её *вершиной*, а *осью* — прямую, проведённую через эту точку и центр круга».

Заменяя здесь круг какой угодно кривой, мы получаем наше определение конической поверхности при любой направляющей.

Во втором определении Аполлоний говорит: «конусом же я называю фигуру, заключённую между кругом и конической поверхностью от вершины до окружности круга, вершиной конуса — точку, которая представляет вершину поверхности, осью — прямую, проведённую из вершины к центру круга, а основанием — круг».

Совершенно аналогичное этому определение цилиндрической поверхности даёт Серен¹⁹.

Евклид рассматривает только прямые конусы и цилиндры, т. е. такие, у которых ось перпендикулярна к основанию, а Аполлоний различает уже *прямые* — с осью, перпендикулярной к основанию, — и *косые*. То же делает Серен для цилиндров.

Конечно, античные математики не мыслили цилиндр как *предельную фигуру конуса*.

И у Рамуса²⁰ при его дихотомном делении особенно резко выступает противоположность цилиндра конусу. Только весьма поздно, пожалуй только со времени Понселе, когда установилось наше понятие о *бесконечно удалённой точке прямой*, цилиндр стал мыслиться как конус с бесконечно удалённой вершиной.

10. Евклидово существование телесных фигур. В комментариях к планиметрическим книгам Начало мы указали, что Евклид признаёт *существующими* только такие объекты, *которые могут быть построены циркулем и линейкой на основании его трёх постулатов*.

Но в чём состоит евклидово существование *телесных* фигур? Нельзя предполагать, что здесь он круто поворачивает на лежандрову точку зрения. Следует думать, что и здесь он остаётся на своей точке зрения, признавая только те доказательства, все элементы которого могут быть *построены*. Но тогда представляется, что ему необходимо было бы выставить особые постулаты, относящиеся уже к *построениям в пространстве*.

¹⁹ Serenus. De sectione cylindri. (Opuscula, ed. Heiberg, 1896).

²⁰ Ramus. Geometriae libri 27, Basileae, 1567; Scholarum mathematicarum libri 21, Basileae, 1569.

Таким, например, должен был бы явиться постулат о возможности проведения плоскости через две пересекающиеся прямые.

Но вместо этого мы находим у Евклида предложение 2 книги XI, играющее роль такого постулата, причём нельзя не согласиться с тем, что в книге XI чувствуется в этом отношении некоторая нежелательность.

Генетический характер некоторых определений порождает в них постулирование некоторых операций, и можно сказать, что аналоги планиметрических постулатов являются также в форме определений. Операция описания окружности на плоскости отвечает операции получения сферы вращением полукруга около диаметра, а также получение конуса и цилиндра вращением.

Очень интересной является принадлежащая Борелли²⁾ попытка переработки книги XI по образцу первой с выявлением следующих постулатов:

1. Возможно через какую-либо прямую провести плоскость.
2. Возможно продолжить, как угодно, плоскость.

Борелли прав, конечно, указывая на необходимость введения этих постулатов в «Начала», но он не прав, считая их вполне достаточными вместе с планиметрическими.

II. Стереометрические аксиомы сочетания. Гильберт представляет следующие аксиомы сочетания в пространстве:

1₄. Для каких-либо трёх точек A, B, C , не лежащих на одной прямой, существует всегда плоскость α , принадлежащая каждой из них. Для любой плоскости всегда существует принадлежащая ей точка.

1₅. Для трёх не лежащих на одной прямой точек A, B, C существует не более одной плоскости, принадлежащей каждой из них.

1₆. Если две точки A и B прямой a лежат на плоскости α , то и каждая точка прямой a лежит на плоскости α .

1₇. Если две плоскости α и β имеют общую точку A , то они имеют по меньшей мере ещё одну общую точку B .

И, конечно, вообще при любом, претендующем на логическую строгость построении системы Геометрии необходимыми аксиомами прежде сейчас упомянутых. Но Евклид их не выявляет, а по его образцу они не выявляются и в наших учебниках Геометрии.

Гильбертова аксиома 6 группы I превратилась у нас в определение плоскости. Евклид же её доказывает, формулируя следующим образом: прямая не может разделяться на две части так, чтобы одна её часть лежала в одной плоскости, а другая — в другой; вместе с тем он доказывает и аксиому 7 первой группы Гильберта — пересекаемость плоскостей по прямой.

Но первые три предложения Евклида не удовлетворяли математиков XVII в, ещё более, XVIII вв. И над аксиомами, обосновывающими книгу XI «Начал», размышляли многие математики.

²⁾ Borellius, Euclides restitutus, Romae, 1670.

Клавий²³), как и Евклид, не давал стереометрических аксиом, но их даёт Борелли, выдвигающий следующие стереометрические аксиомы:

1. Две плоскости не имеют общей части.
2. Сечение двух плоскостей — прямая.
3. Первое предложение книги XI «Начал Евклида.

Что касается положения о том, что две пересекающиеся прямые находятся в одной плоскости, то Борелли предлагает для него следующее *фронтальное* доказательство, которое мы приводим здесь дословно.



Черт. 4.

Пусть две прямые AB и CD (черт. 4) пересекаются в точке E . Проводя на основании Первого постулата плоскость через AB , мы вставляем её вращаться вокруг AB до тех пор, пока на эту плоскость не попадёт точка D . Но тогда прямая, имея с плоскостью две точки, окажется на ней всеми своими точками.

Этот прием применяется почти во всех учебниках лежандрова типа, например в большом курсе Руше и Комберусса²⁴), при доказательстве того, что плоскость определяется *прямой и точкой*. Но при этом прибавляется ещё доказательство *единственности* такой плоскости.

По отношению к евклидову доказательству третьего предложения Р. Симсон и другие отмечают, что его заключение должно быть исправлено. В доказательстве Евклида из того, что линии DEB и DIB заключают пространство, выводится, что они *не прямые*.

Р. Симсон замечает, что здесь можно заключить лишь о том, что *одна из линий DEB и DIB не прямая*, и предлагает видоизменить доказательство следующим образом.

Так как DEB и DIB предполагаются прямыми, то если бы эти прямые не совпали, то заключали бы пространство, что противоречит аксиоме 9 книги I.

[В сущности эта критика не является вполне справедливой, потому что идея доказательства Евклида может быть изложена следующим образом.

Если две плоскости пересекаются по некоторой линии, то эта линия может быть только прямой.

Действительно, две плоскости имеют две общие точки D и B , принадлежащие их линии пересечения. Проведём через эти точки на каждой плоскости по прямой DEB и DIB , так как две прямые не заключают пространства, то эти прямые должны совпадать; иными словами, прямая DIB одной плоскости будет

²³ Clavius, Euclidis elementa, Frankfurti, 1607.

²⁴ E. Rouché et Ch. Comberousse, Traité de géométrie, Paris, 1891.

принадлежать и другой, и обратно; это же значит, что линия пересечения двух плоскостей обязательно будет содержать некоторую прямую.

Предположим теперь, что обе плоскости будут ещё иметь какую-нибудь общую точку M , не лежащую на прямой DB . Тогда нетрудно будет показать, что они будут иметь в общие прямые DM и MB , а значит, и общий трёхугольник DMB , но тогда, согласно предложению 2, нетрудно будет доказать, что обе плоскости должны совпасть, а это противоречит предположению $\{H, b\}$.

12. Теоремы о перпендикулярности прямой к плоскости. В настоящее время вместо евклидова доказательства теоремы 4 во всех учебниках приводится следующее доказательство Коши.

Пусть прямая AB перпендикулярна к двум прямым BC и BD . докажем, что она будет перпендикулярна и ко всякой другой прямой, проведённой в плоскости P прямых BC и BD , например к BE (черт. 5). Проведём какую-нибудь прямую на плоскости P , пересекающую прямые BC , BE , BD в точках C , E , D . Эти точки соединим с точками A и A' , симметричными относительно плоскости P ($BA' \perp BA$).

Из соотношений $AB \perp A'B$, $BC = BC$ и $AB \perp A'B$, $BD \perp BD$ заключаем соответственно о равенстве прямоугольных треугольников:

$$\triangle ABC = \triangle A'BC \text{ и } \triangle ABD = \triangle A'BD.$$

Отсюда выводим, что $AC = A'C$, $AD = A'D$, следовательно,

$$\triangle ACD = \triangle A'CD.$$

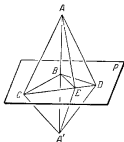
Так как в треугольниках ACE и $A'CE$ сторона CE общая, $AC = A'C$ и $\angle ACE = \angle A'CE$, то $AE = A'E$.

Наконец, в треугольниках AEB и $A'EB$ имеем $AE = A'E$, $AB = A'B$, $EB = EB$, откуда вытекает равенство смежных углов ABE и $A'BE$ и, следовательно, перпендикулярность AB к EB .

Заметим, что оба доказательства Евклида и Коши — носят абсолютный характер, т. е. сохраняют силу и в пространстве Лобачевского.

Совершенно другой характер имеет доказательство Лжеалдра²⁴.

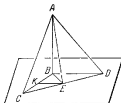
²⁴ Цит. соч. (см. список 13), кн. V, предл. 4 (см. также X и 3 с, т. III, стр. 280).



Черт. 5.

Лежандр проводит из середины K отрезка CB прямую $KE \parallel BD$, соединит точку F пересечения BE с KE с точкой C , причём E является серединой CD (черт. 6).

Затем используется соотношение между медианой и сторонами (которое, конечно, уже не имеет места на плоскости Лобачевского).



Черт. 6

Для $\triangle ACD$

$$AC^2 + AD^2 = 2AF^2 + 2ED^2;$$

для $\triangle BCD$:

$$BC^2 + BD^2 = 2BE^2 + 2ED^2.$$

После вычитания получаем:

$$AC^2 - BC^2 + AD^2 - BD^2 = 2AF^2 - 2BE^2. \quad (1)$$

Но теорема Пифагора (уже не абсолютная) дает:

для $\triangle ABC$:

$$AC^2 - BC^2 = AB^2;$$

для $\triangle ABD$:

$$AD^2 - BD^2 = AB^2,$$

вследствие чего уравнение (1) превращается в следующее:

$$2AB^2 = 2AF^2 - 2BE^2,$$

откуда

$$AF^2 = AB^2 + BE^2,$$

и по обратной теореме Пифагора заключаем, что $\angle ABE$ прямой, т. е. $AB \perp BE$.

В методическом отношении можно признать вполне рациональным расслоение доказательств Коши на две теоремы, как это делает Адамар.

А именно, можно сперва доказать, что геометрическое место точек, равноудалённых от двух точек A и A' (черт. 5), представляет плоскость, перпендикулярную к прямой AA' и проходящую через середину отрезка AA' .

Тогда доказательство предложения 4 Евклида значительно сокращается.

Геометрическое место точек, равноудалённых от A и A' в плоскости $AA'C$, есть BC , в плоскости же $AA'D$ — BD . Таким образом, плоскость точек, равноудалённых от A и A' , т. е. перпендикулярная к AB , должна иметь с плоскостью, проходящей через BC и BD , две общие прямые и поэтому должна с ней совпадать.

13. Псевдодоказательства, относящиеся к перпендикуляру. С помощью псевдодоказательств дежандровские методисты старались упростить элементарный курс Геометрии. Вот,

что, например, остаётся у них от предложения 4 книги XI «Начал».

Прежде всего высказывалось следующее определение:

Перпендикулярной линией к плоскости мы называли такую линию, которая не наклоняется ни к какой стороне плоскости.

Почему, спрашивает Бэзу²⁵, линия AB , перпендикулярная к плоскости, должна быть вместе с тем перпендикулярна ко всем линиям $BC_1, BC_2, BC_3, \dots$, проведённым от точки B на плоскости? По-тому что, отвечает Бэзу, если бы она не была перпендикулярна к какой-либо линии, то она наклонилась бы в её направлении.

Далее доказывается, что перпендикуляры к AB не выходят из плоскости, перпендикулярной к AB , ибо в противном случае существовало бы два перпендикуляра к этой прямой, лежащие в одной плоскости.

После этого предложение 4 Евклида доказывается ссылкой на то, что плоскость, получаемая вращением перпендикуляра к AB , и будет как раз та, которая проходит через прямые BC и BD .

Бэзу оперирует понятием наклонения в *математизированной* форме. Его определение перпендикуляра к плоскости тот час же совпадает с евклидовым, как только это понятие подвергается математизации.

Интересно сравнить Бэзу с Борелем, идущим по пути Мерцанской программы с ослаблением роли лического элемента за счёт обогащения итевич, с которыми ознакомление ведётся путём *интуиции*²⁶.

У Бореля тоже определение перпендикуляра не оправдывается логически. Существование перпендикуляра подтверждается только интуицией. Но Борель уже не оперирует нематематизированным понятием, созданная одна иллюзия доказательства. Для него, как и для Евклида, прямая перпендикулярна к плоскости, если она перпендикулярна ко всем прямым на плоскости, проходящим через её основание A , потому что перпендикулярная плоскость получается в результате вращения перпендикуляра к прямой вокруг этой прямой как оси. Поэтому плоскость, проходящая через A (черт. 7), должна содержать прямые AC и AD , перпендикулярные к первоначальной прямой, а поэтому она должна сливаться с плоскостью этих прямых.

Конечно, Борель идет еще дальше Бэзу; у Бэзу *призрак осязательств*, у Бореля же оно совершенно исчезает. Наиболее существенным в его изложении является следующее рас-



Черт. 7.

²⁵ «Курс математики», русск. перевод Загорского, Москва, 1798, стр. 158.

²⁶ Borel, Géometrie, Paris, 1903.

суждение: когда мы открываем книгу, то края AC и AD перпендикулярны книжке, определяющей собой плоскость, перпендикулярную к ребру корешка.

14. Плоскость параллельных прямых. Параллельные прямые определяются как прямые, лежащие в одной плоскости и не пересекающиеся при продолжении (определение 23 книги I), так что через две параллельные всегда проходит плоскость. Из предложения 7 книги XI вытекает, что такая плоскость может быть только одна, потому что плоскости, у которых совпадают по две пересекающиеся прямые, совпадают между собой. Но Евклид и здесь, как и в предложении 2, не выявляет этого обстоятельства, совершенно так же, как в книге I он не выявляет того, что через две точки можно провести только одну прямую, хотя это тоже непосредственно вытекает из 1, 2 постулатов и аксиомы о том, что две прямые не заключают пространства.

Можно вполне согласиться с необходимостью седьмого предложения, если только не брать далее определение плоскости, при котором это предложение становится тривиальным.

Р. Симсон же старается доказать, что это предложение не принадлежит самому Евклиду, а вставлено неопытным издателем.

Он замечает, что проведение прямой EL в плоскости параллельных уже предполагает то, что утверждается в самом предложении, а именно, что прямая, соединяющая точки E и L на параллельных, попадает в плоскость параллельных.

Но Р. Симсон неправильно понимает Евклида, который утверждает не то, что из плоскости параллельных прямых можно провести прямую от любой точки одной параллельной к любой точке другой параллельной, что действительно вытекает непосредственно из самого определения параллельных, а то, что *каждая* прямая, проведенная от E к L , лежит в плоскости параллельных. Здесь можно было бы заметить, что всё равно, что сказать: «прямая» или «всякая прямая», так как между двумя точками можно провести *только одну* прямую. Но не следует забывать, что этого простого предложения нет у Евклида ни в роли аксиомы, ни в роли доказуемого предложения. Конечно, если бы он *был*, то дело оказалось бы гораздо проще, но при его отсутствии и пришлось сослаться на аксиому о том, что две прямые не заключают пространства, и таким образом нечаянно внести доказательство этого простого предложения как составную часть доказательства предложения 7.

15. О параллельных. Лежандр (предложение 7 книги 5, следствие 2) доказывает это предложение так. Он проводит перпендикулярную к EL плоскость, которая по предложению 8 будет перпендикулярной и к обеим прямым AB и CD . Но тогда, согласно предложению 6, обе прямые AB и CD будут параллельны и между собой.

16. Угол между прямыми. Дескрие предложение имеет более важное значение для нас, чем для Евклида. Прежде всего следует сделать в нём поправку: углы могут быть или равны,

или служить дополнением до двух прямых, что было выявлено ещё Клавием. При евклидовом доказательстве предполагают я, что AB и BC направлены, конечно, в одну сторону с ED и EF . Если бы одна пара была бы направлена в различные стороны, то мы получили бы не равенство, а дополнение до $2d$.

Предложение 10 может быть доказано с помощью теорем книги I «Начал».

У нас эта теорема изходит себе применение при установлении понятия линейного угла, измеряющего двугранный угол между плоскостями. Мы доказываем, что восставшая перпендикулярна в различных точках ребра, мы получаем равные углы, так как стороны таких углов параллельны между собой. Затем мы устанавливаем понятие угла между двумя прямыми, проводя из какой-нибудь точки O прямые, параллельные данным.

Величина таким образом построенного угла на основании этой теоремы не зависит от выбора точки O .

У Руше и Комберуса это положение помещается раньше евклидова четвёртого предложения и вот почему. Они определяют (но, конечно, вполне естественно) перпендикуляр к плоскости как прямую, перпендикулярную — только ко всем прямым на плоскости, её пересекающим, как у Евклида, но и ко всем вообще прямым этой плоскости.

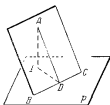
Это определение в результате оказывается эквивалентным евклидову, именно на основании предложения 10, причём, конечно, в этом определении должно предшествовать определение угла между двумя непересекающимися прямыми и, в частности, определение перпендикулярности прямых. Однако это понятие чуждо не только Евклиду, но и математикам XVII века. Оно устанавливается с понятием *направления* прямой, которое вымывается *кинематическим* понятием скорости.

17. Единственность перпендикуляра. Комманди в своём переводе Евклида и Р. Симсон добавляют: из точки над плоскостью можно опустить лишь один перпендикуляр на эту плоскость, ибо если бы их было два, то они были бы параллельны один другому (предложение 6), что нелепо, так как они пересекаются.

18. Существование перпендикуляра к плоскости. Я уже отметил, что, для определения перпендикуляра к плоскости, Евклид не оправдывает этого определения (см. комментарий 2); определяемый объект даётся только интуитивной. Но, вводя перпендикуляр как элемент в доказательство, Евклид оказывается вынужденным в силу своего взгляда на доказательство дать построение этого перпендикуляра.

Евклидово построение перпендикуляра к плоскости P из точки A сводится к проведению прямой BC на плоскости P (черт. 8) и к проведению перпендикуляра AD к BC в плоскости BCA , перпендикуляра Df к BC в плоскости P и, наконец, перпендикуляра AI к ID в плоскости ADI .

Это построение даёт перпендикуляр, но вовсе не убеждает, что существует только он один. В предложении 13 Евклида доказывается, что из данной точки плоскости можно восстановить к этой плоскости только один перпендикуляр; но теоремы об единственности опущенного перпендикуляра у него нет, хотя это совсем нетрудно было бы доказать.



Черт. 8.

интуитивической, т. е. двух точек зрения, из которых первая требует лишь установления существования, а вторая — ещё и осуществимости.

Прежде всего в доказательстве Бониз устанавливается, что если из A провести к EF наклонную (черт. 9), то всегда можно найти меньшую, являющуюся перпендикуляром из A на EF .

Отсюда ясно, что прямая AB , которая является наименьшей наклонной, представляет прямую, перпендикулярную ко всем прямым плоскости, проходящим через её основание B , а вместе с тем и ко всем прямым EF плоскости, т. е. ко всем прямым любого направления. Далее Бониз устанавливает существование минимума на том основании, что он получает множество элементов — прямых $a_1, a_2, a_3, \dots$ — таких, что для каждого элемента можно указать меньший.

Математическая мысль в настоящее время переросла такое доказательство. В нем доказывается то, что существует *наименьшая* прямая для прямых, проводимых из A к плоскости, но не *минимум*; однако во времена Бониз эти два понятия ещё не различались между собой, и только теоретико-множественное исследование вполне выявило их различие.

Кстати, возвращаясь к предложению 4, укажем тот порядок, в котором идут Руше и Комберусс. За этой теоремой у них идут доказательства единственности опущенного на плоскость перпендикуляра, единственности плоскости, проведенной перпендикулярно к прямой из данной точки, и теоремы о том, что геометрическое место прямых, перпендикулярных к прямой, есть плоскость, к ней перпендикулярная.

Очень характерным для позднейшего и от нас недалекого времени является принадлежащее Бониз доказательство существования перпендикуляра, приводимое Руше и Комберуссом.

Различие между этим доказательством и доказательством Евклида вполне соответствует различию точек зрения канторинской и прагматической или логистической и интуитивической.

Различие между этим доказательством и доказательством Евклида вполне соответствует различию точек зрения канторинской и прагматической или логистической и интуитивической.



Черт. 9.

Эти теоремы являются следствием 5-го евриклидова предположения. Что же касается предложения 4, то оно даётся в более общей форме, чем у Евклида.

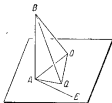
Берутся какие угодно две прямые DC и EG на плоскости, пересекающиеся в точке C (черт. 10).

Через C проводится плоскость перпендикулярно к AB , она и будет содержать обе прямые EG и CD .

19. Так же о перпендикулярности к двум прямым. Очень интересным является доказательство Давидовича Черменка, приводимое Такс в его известных «Элементах геометрии». В нём вскрывается интересная логическая ошибка, ускользнувшая от такого крупного математика, каким был Талей²⁹.



Черт. 10.



Черт. 11.

Доказательство это ведётся от противного. Пусть AB (черт. 11), перпендикулярная к прямым AO и AE , не будет перпендикулярна к плоскости AOE . Но пусть этим перпендикуляром будет BQ .

Проводим $OQ \perp AQ$. Из прямоугольного $\triangle BAO$ следует, что

$$BO^2 = BA^2 + AO^2. \quad (1)$$

Но так как $BQ \perp$ к плоскости, то из $\triangle BQA$ следует:

$$BA^2 = BQ^2 + AQ^2, \quad (2)$$

а из $\triangle AQO$

$$AO^2 = AQ^2 + QO^2. \quad (3)$$

Подставляя выражение $BA^2 = AO^2$ из (2) в (1), получаем:

$$BO^2 = BQ^2 + QO^2 + 2AQ^2,$$

следовательно,

$$BO^2 > BQ^2 + QO^2,$$

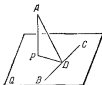
а это значит, что $\angle BQO$ не прямой.

Дефект доказательства состоит в том, что оно предполагает, что *должен существовать перпендикуляр*; между тем его существование устанавливается только после того, как доказана эта теорема.

²⁹ T a q u e t, *Elementa geometriae...*, Antwerp, 1654.

20. Теорема о трёх перпендикулярах. В настоящее время большое значение имеет теорема *о трёх перпендикулярах*, не содержащаяся в «Началах Евклида» и ведущая своё начало от Луи Бертрана. Она доказывалась уже в «Элементах» Лежандра.

Лежандр её формулирует так: пусть прямая AP (черт. 12) перпендикулярна к плоскости Q и пусть BC — какая-нибудь прямая, находящаяся в этой плоскости. Если из точки P основания перпендикуляра провести $PD \perp BC$ и соединить точки A и D , то AD будет перпендикулярна к BC .



Черт. 12.

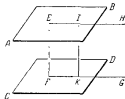
В настоящее время обычно дают более краткую формулировку: прямая, проведённая в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к её проекции, будет перпендикулярна и к этой наклонной.

Доказательства её мы не будем повторять (оно дано Лежандром²⁰), и излагается в известном учебнике А. Киселёва).

21. Прямая, перпендикулярная к двум плоскостям. Большинство комментаторов — Тарталья, Коммандини, Клавий, Джордано Витали — обращают 14-е евклидово предложение:

Если две плоскости параллельны и прямая перпендикулярна к одной из плоскостей, то она будет перпендикулярна и к другой. Пусть AB и CD — две параллельные плоскости (черт. 13) и пусть EF — перпендикуляр к плоскости CD . Пересечем обе плоскости AB и CD плоскостью $KHIG$, проходящей через EF . Если угол IEF острый, то причём HI и KG , находящиеся в параллельных плоскостях AB и CD , имеют общую точку, что абсурдно.

Таким же образом доказывается, что EF перпендикулярна и к другой прямой в плоскости AB , а потому (предложение 4 книги XI) EF перпендикулярна и к плоскости AB .



Черт. 13.

Укажем ещё видоизменение Витали евклидова доказательства. Витали прежде всего выставляет следующую лемму:

Если существует прямая, перпендикулярная к двум плоскостям, то всякая другая прямая, перпендикулярная к одной из плоскостей, будет перпендикулярна и к другой. Все эти перпендикуляры равны между собой и меньше прямых,

²⁰ Цит. соч. (см. сноску 13), кн. V, предл. 6, стр. 145.

расположенных между двумя плоскостями и не перпендикулярных к ним.

Пусть AB будет перпендикулярна к плоскостям CD и EF (черт. 14). Из точки G , лежащей на плоскости CD , проведем перпендикуляр GH к плоскости EF . Так как $\angle ABH = \angle BHG$, то $AB \parallel GH$ (28,1), так что если $AB \perp CD$, то (8,X) также и $GH \perp CD$, и тогда $HG = AB$, как противолежащие стороны параллелограмма.

Для доказательства же второй части леммы полагается KI не перпендикулярно к плоскости. Если проведем из K перпендикуляр KL к EF , то он будет перпендикулярен и к CD . Тогда угол IKK прямой (17,1) будет больше угла KIL , откуда (19,1) $IK < IL$.

Установив эту лемму, Вяттаи выводит евклидово положение, что перпендикуляры к плоскости DC до плоскости EF равны отрезку AB и поэтому плоскости, не имея общей точки пересечения, параллельны между собой.

22. Стереометрические аналоги. У Евклида совершенно не выступают стереометрические аналоги планиметрических объектов и теорем. В настоящее время они довольно широко выступают в элементарной математике, и еще выпуклые в аналитической геометрии, где для линии, определяемой на плоскости одним уравнением, имеем два аналога: поверхность, определяемую одним уравнением, и линию, определяемую двумя.

Для прямой основным аналогом является плоскость, но можно взять также и пространственную прямую.

Приведем примеры аналогов для геометрических понятий:

На плоскости

Угол между прямыми

Параллельные прямые

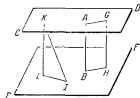
Треугольник

Аналогом теоремы:

Из данной точки можно провести только одну прямую, параллельную данной и,
будет следующая:

Из данной точки можно провести только одну плоскость, параллельную данной и.

Интересно отметить, что теорема, таким образом формулируемой, нет ни у Евклида, ни у Клавия. Но она непосредственно



Черт. 14.

вытекает из построения Клавдия, состоящего в том, что плоскость, параллельная данной, проводится через прямые l_1 и l'_1 , проходящие через точку M параллельно прямым l и l' на другой плоскости.

Этой теореме, входящей во все наши учебника, нет даже у Лежандра. Но у Клавдия имеется теорема о том, что две плоскости, параллельные одной и той же плоскости, параллельны между собой. Причём даны два доказательства. Одно состоит в том, что если плоскости α, β, γ , то, проводя прямую $a \perp \alpha$, мы получаем, что $a \perp \gamma$, откуда следует, что $a \perp \beta$ и $a \parallel \beta$. Другое состоит в том, что все три плоскости α, β, γ пересекаются двумя π, ρ , причём в α и γ образуются углы с параллельными сторонами a_1, c_1, a_2, c_2 и то же в β и γ : b_1, c_1, b_2, c_2 , откуда $a_1 \hat{=} b_1, a_2 \hat{=} b_2$ и, следовательно, $\alpha \parallel \beta$.

То, что параллелепипед — аналог прямоугольника, сознаётся и Кампанусом и Клавдием.

23. Абсолютный характер теоремы о линейных углах двугранных углов. В высокой степени интересным является факт, что теорема о линейных углах двугранных углов является *абсолютной*, то-есть не зависящей от аксиомы о параллельных. Существует абсолютное (в том же смысле) доказательство Энрикеса и Амальди²⁹⁾ и даже более общей теоремы:

В двух равных двугранных углах сечения, равнонаклоненные к ребрам, равны и, обратно, двугранные углы с равными равнонаклонёнными к ребру сечениями, равны.

24. Равенство трёхгранных углов. Трёхгранные углы с плоскими углами (α, β, γ) и $(\alpha', \beta', \gamma')$ и с двугранными (a, β, γ) $(\alpha', \beta', \gamma')$ равны в следующих случаях:

1) когда равны плоские углы, заключённые между равными двугранными углами, расположенными в том же порядке: $\alpha = \alpha', \beta = \beta', \gamma = \gamma'$;

2) когда равны двугранные углы между равными плоскими углами в том же порядке: $\alpha = \alpha', \beta = \beta', \gamma = \gamma'$;

3) когда равны плоские углы: $\alpha = \alpha', \beta = \beta', \gamma = \gamma'$;

4) когда равны двугранные углы: $\alpha = \alpha', \beta = \beta', \gamma = \gamma'$.

Первые два случая равенства трёхгранных углов обычно доказываются *наложением*. Четвёртый сводится к третьему с помощью *одинаковости трёхгранных углов*, рёбра которого перпендикулярны к граням данного К этому углу прибегает Насир-Эддин в XIII веке; им также пользовался Вигда (1593) и Снезлий (1627).

Что касается третьего случая, то здесь различные авторы употребляют различные приёмы:

²⁹⁾ Enriques e Amaldi, *Questioni di Geometria Elementare*, 1924, стр. 22—23. Agostini, *L'égalté de trièdres en Euclide* (Periodico di Math., 1928).

1) Мы уже дали пример непосредственного доказательства Р. Симсона (см. комментарий §3). В нем доказывается, что если равны плоские углы, то равны и двугранные углы. Такое доказательство впервые выдвигает Денарсье. Этого же типа и доказательство Лежандра.

2) Аналогический прием, приводящий к противоречию с ранее доказанным предложением:

Если два плоских угла одного трёхгранного угла равны двум плоским углам другого и если двугранный угол между первой парой углов больше заключенного между второй парой, то третий плоский угол первого трёхгранника угла больше соответственного плоского угла второго.

Такое доказательство находим у Руше и Комберуса.

3) Доказательство приложением симметричного трёхгранного угла, вполне аналогичное доказательству третьего случая равенства треугольников. Э. доказательство дается Д'Овидио.

4) Установка равенства пирамид, получаемых отсечением на ребрах соответственно равных отрезков.

5) Прием Эриксена и Амальди, сводящий критерий равенства трёхгранных углов к расположению того, что расположились сечения двугранных углов равны, и обратно.

Доказательства эти оказываются не зависящими от аксиом о параллельных.

25. Многогранный угол. Евклид формулирует это предложение для общего случая, но доказывает его только для частного случая: *трёхгранного* угла. Для общего

случая это предложение доказывают комментаторы Гарталь и Клавий, которым следует и Лежандр. Доказательство ведется таким образом (черт. 15): угол S пересекается плоскостью $ABCDE$ и из некоторой точки O секущей плоскости проводятся прямые OA, OB, OC, OD, OE . Сумма углов в треугольниках ASB, ASC такая же, что в AOB, BOC .

Но в точке B углы ABO и OBC вместе составляют меньше, чем ABS и SBC ; таким же образом в C имеем:

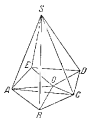
$$\angle BCO + \angle OCD < \angle BCS + \angle SCD$$

Черт. 15.

и то же самое имеет место для всех углов

в $ABCDE$. Отсюда следует, что сумма углов в треугольниках с вершиной в S должны оказаться меньше суммы углов при O . Но последние равны $4d$, следовательно, сумма плоских углов многогранного угла меньше $4d$.

Конечно, при этом предполагается *выпуклость* многогранного угла. При доказательстве этого предложения можно пользоваться принципом *пятиой математической индукции*.

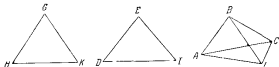


26. Другое доказательство предложения 22. В «Добавлении к IV тому Евклида в издании Гейберга помещено другое доказательство предложения 22:

«Иначе»

Пусть будут три данных плоских угла ABC , DEI , $НОК$, из которых два во всех сочетаниях будут больше оставшегося, и пусть их содержат равные прямые AB , BC , DE , EI , HO , GK и соединим AC , DI , HK . Я утверждаю, что возможно из «прямых», равных AC , DI , HK , составить треугольник, то-есть, опять, что две «прямые» будут во всех сочетаниях больше оставшейся (черт. 16).

Если теперь опять углы при точках B , E , O будут равны, то станут равными и «прямые» AC , DI , HK и будут две больше



Черт. 16.

оставшейся. Если же нет, то пусть углы при точках B , E , G будут неравными, и «угол» при B «будет» больше каждого «угла» при E , G ; значит, и прямая AC будет больше каждой из DI , HK (предложение 24 книги I). И ясно, что AC вместе с каждой из DI , HK будет больше оставшейся. Я утверждаю, что и DI , HK будут больше AC . Построим на прямой AB при точке её B равный углу HOK «угол» ABL , отложим BL равной одной из AB , BC , DE , EI , HO , OK и соединим AL и LC . И поскольку две AB , BL равны двум HG , OK — каждая каждой — и заключают равные углы, то, значит, основание AL будет равно основанию HK (предложение 4 книги I). И поскольку углы при точках E , G будут больше ABC , у них же «угол» HOK равен углу ABL , то, значит, оставшийся угол при E будет больше угла ABC . И поскольку два LB , BC равны двум DE , EI — каждая каждой — и угол DEI больше угла LBC , то, значит, основание DI будет больше основания LC (предложение 24 книги I). Но HK , как доказано, равна AL ; значит, DI , HK будут больше AL , LC ; но AL , LC больше AC ; значит, тем более, DI , HK будут больше AC . Значит, из «прямых» AC , DI , HK две будут больше оставшейся во всяких сочетаниях; итак, возможно из «прямых», равных AC , DI , HK , составить треугольник, что и требовалось доказать».

27. Частные случаи. В большинстве рукописей после этого следует разбор двух частных случаев, а именно, когда центр X круга оказывается на периметре треугольника или вне его. Поскольку после заключительных слов предложения ничего уже

AB равна BC , то и XO будет равна XP . Так что и остаток OL будет равен остатку PM . Значит, LM будет параллельна PO (предложение 2 книги VI), и треугольник LMX равноуголен треугольнику PXO (предложение 29 книги I). Значит, будет, что как XL к LM , так и XO к OP (предложение 4 книги VI) и, переставляя (предложение 16 книги VI), как LX к XO , так и LM к OP . Но LX больше XO , значит, и LM больше OP (предложение 14 книги VI). Но LM равна AC , значит, и AC будет больше OP . Поскольку теперь две AB , BC равны двум OX , XP — каждая каждой — и основание AC больше основания OP , то, значит, угол ABC будет больше угла OPX (предложение 25 книги I). Подобно же вот и если отложим XU равной каждой из XO , XP и соединим OU , докажем, что угол HGK будет больше OXU . Вот поставим из прямой LX при ее точке X (угол) LXS , равный углу ABC , и LXT , равный HGK , отложим каждую из XS , XT равной OX и соединим OS , OT , ST . И поскольку две AB , BC равны двум OX , XS и угол ABC равен углу OXS , то, значит, основание AC , то-есть LM , будет равно основанию OS (предложение 4 книги I). На том же пог о новании и (прямая) LN будет равна OT . И поскольку две ML , LN равны двум SO , OT и угол MLN больше угла SOT , то, значит, основание MN будет больше основания ST (предложение 24 книги I). Но MV равна DI , значит, и DI будет больше ST . Поскольку теперь две DE , EI равны двум SX , XT и основание DI больше основания ST , то, значит, угол DEI будет больше SXT (предложение 25 книги I). Угол же SXT равен ABC , HGK , (вместе вписан). Значит, угол DEI будет больше ABC , HGK . Но он и раньше: это же невозможно.

28. О делении параллелепипеда диаметральной плоскостью. В евклидовом доказательстве теоремы о делении параллелепипеда диаметральной плоскостью из две равновеликих (по Евклиду — равных) призм комментаторы находят два недостатка: малый и большой.

Малый состоит в том, что Евклидом не доказывается параллельность диагоналей CI и DE . Необходимость такого доказательства отмечается Клавием, который и исправляет указанный дефект, замечая, что CD параллельна и равна GB , а IE параллельна и равна AH уже по самому определению параллелепипеда. Граними которого являются параллелограммы, но тогда CI параллельна и равна IE и $CIED$ представляет параллелограмм, так что CI параллельна и равна DE .

Большой же недостаток видят в том, что содержание теоремы является *неправильным в общем смысле*, а в том случае, когда оно правильно, само *доказательство* является *недостаточно строгим*.

Но первый недостаток можно видеть только при современной понимании равенства в смысле тождества форм и размеров, причём еще с одинаковым расположением (т. е. не считая симметричные тела равными, или в смысле совмещения при изложении, а не в евклидовом смысле равенства как равновеликости.

Нестрогость евклидова доказательства можно видеть только в том, что оно опирается на определение, представляющее по существу не вполне очевидную аксиому вроде аксиомы 5 группы III (аксиомы конгруэнтности) Гильберта.

Исправление этого недостатка сводится к доказательству равенства величин двух *симметричных фигур*, в данном случае — двух треугольных призм, которые оказываются симметричными.

То, что такие симметричные призмы оказываются равными в евклидовом смысле, т. е. что объем не зависит от того, в какую сторону приносится поворота, это и Лежандру сперва кажется очевидным, но затем он дает строгое доказательство этого положения.

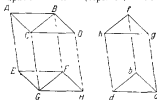
Симметричность получаемых призм легко обнаруживается.

Мы отделим одну из призм $CBFG$ (черт. 19) и рассмотрим, может ли она совместиться со второй половиной $ABCEFG$.

Нетрудно видеть, что все грани обеих полупризм будут соответственно равны между собой, так же как и все плоские углы и наклоны соответственных плоскостей друг к другу и все телесные углы будут соответственно заключаться между равными плоскими углами. Тем не менее совместить обе полупризмы нам не удастся.

Попробуем сначала привести в соприкосновение нижние основания. Мы можем сделать, чтобы основание GH совпало с FE , затем HF с EG и, наконец, FG с GF , для этого достаточно лишь повернуть правую полупризму на 180° вокруг вертикальной оси. Треугольники FQH и FEG совпадут друг с другом, но призмы совпадут только в том случае, когда они прямые. Действительно, в том положении, в каком нарисованы на чертеже обе полупризмы, они наклонены влево, при повороте же на 180° вокруг вертикали правая полупризма наклонится вправо и совпадения не получится.

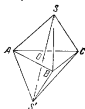
После этого попробуем совместить с основанием FEG верхнее основание BCD правой полупризмы, предварительно повернув ее на 180° вокруг горизонтальной оси так, чтобы верхнее основание стало бы нижним (положение $bcdfgh$ справа). Если теперь привести в соприкосновение de и EF , то мы увидим, что получаются два треугольника FEG и deb , *симметричные* относительно общего основания de или EF , которые могут быть приведены к совпадению лишь после переворачивания их другой стороной (с выводом из плоскости), а это приводит нас к уже рассмотренному способу совмещения нижними основаниями.



Черт. 19.

29. Лежандрово доказательство равноудаленности симметричных тел. В основу этого доказательства кладётся учение о *симметрии*, в котором симметричные тела определяются как такие, у которых соответственные точки (в многогранниках — вершины) оказываются на одном и том же расстоянии от некоторой плоскости на перпендикуляре, проведенном к этой плоскости.

Лежандр прежде всего отмечает очевидную совместимость двух симметричных пирамид $ABCS$ и $ABCS'$ (черт. 20) с равнобедренным основанием (II теорема). Затем он указывает, что если из центра круга, описанного около основания, провести перпендикуляр и взять на нем S и S' так, чтобы $OS = OS'$, то получается две равноудаленные пирамиды (II теорема) на том основании, что



черт. 20.

эти пирамиды (по теореме I) разлагаются на равные (в современном смысле, т. е. конгруэнтные) пирамиды. Далее, около треугольной пирамиды можно всегда описать сферу, проходящую через ее вершины. Центр сферы следует искать на перпендикуляре, восстановленном из центра описанной около основания ABC окружности. Каждая точка этого перпендикуляра будет на том же расстоянии от точек A, B, C , а среди них найдется и такая, которая окажется на таком же расстоянии и от S .

Затем доказывается, что две симметричные треугольные пирамиды равноудалены.

Для доказательства вокруг каждой пирамиды описываются сферы, радиусы которых будут равны. Если опустить перпендикуляры из центра на грани и провести прямые к вершинам, то получим пирамиды, которые согласно теореме II будут равноудалены. Разложением треугольной пирамиды на три равноудаленные пирамиды распространяется полученный результат и на призмы.

30. Доказательство Карстена равноудаленности призм, получаемых диагональным сечением. Изложим очень интересное, но теперь совершенно забытое, доказательство предложения 28 Евклида, данное Карстеном²⁰, причём сохраним его форму изложения, относящуюся ко времени, когда теория пределов, основанная Д'Аламбером, ещё не вполне выкристаллизовалась.

Проводим в каком параллелепипеде AS диагональное сечение $GCMQ$, проходящее через центры оснований O и O' , затем плоскости $HBLR$, $GAQK$ и $FDNP$ $ACMK$ (черт. 21).

Легко видеть, что четыре полученных параллелепипеда конгруэнтны между собой и составляют $\frac{1}{4}$ данного. При этом два из них делится диагональной плоскостью $GCMQ$ на треугольные призмы. Будем называть их *внешними*, а оставшиеся неразделёнными — *средними*. Если теперь каждый внешний параллелепи-

²⁰) Karsten, *Lehrbegriffe der Mathematik*, Gressfeld, 1768.

под разделять, как данный, то в каждом получаются опять два параллелепипеда — два средних и два внешних, т. е. четыре плоских, из которых каждый составит $\frac{1}{16}$ данного. В свою очередь каждый из вновь полученных внешних также можно разделить на четыре части; получается уже новая партия параллелепипедов, составляющих $\frac{1}{16}$ данного.

Такое деление можно продолжать *до бесконечности*.

Так как при этом сумма первой партии двух средних параллелепипедов составляет половину первоначального, второй партии половину половины и т. д., то разность между всеми параллелепипедами и суммой средних может быть сделана как угодно малой (по предложению I книги X). Разность между призмами GSC и GCK может состоять только из этих внешних призм. Но так как сумма этих последних может быть сделана как угодно малой, то и разность GSC и GCK может быть сделана как угодно малой, т. е. призмы эти равны между собой.

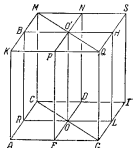
Все эти рассуждения читатель легко может изложить *по слову*.

С помощью бесконечно малых или понятия предела можно еще скорее достигнуть цели, используя, например, принцип Кавальери, о котором мы еще будем ниже говорить; для тела равновесия, если заключаются между парами параллельных плоскостей и если сечения, параллельные этим плоскостям, равновелики. Очевидно, это и имеет место в настоящем случае, так как $GAC = GCI$ и то же относится и ко всем треугольникам, получаемым в сечениях, параллельных основаниям параллелепипеда.

31. Косая и прямая призмы. В настоящее же время доказательство предложения 29 выполняется иначе.

Доказательство Евклида бесспорно в том случае, когда параллелепипеды *прямые*. Если теперь доказать, что косые параллелепипеды и вообще призмы равновелики прямым с тем же ребром и с основанием, равным нормальному сечению призмы, то в евклидовом доказательстве будет введен необходимый корректив.

Пусть $ABCDEA'B'C'D'E'$ будет косая призма с основанием $ABCDE$ и ребром AA' (черт. 22). Проведем перпендикулярное ребрам призмы сечение $GHKLM$ и построим на этом основании прямую призму $GHKLMG'H'K'L'M'$, боковые ребра которой GG' , HH' и т. д. будут равны боковым ребрам AA' , BB' и т. д. косой призмы. Легко убеждаемся в том, что призмы $ABCDEM'$ и HKL



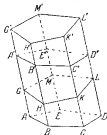
Черт. 21.

и $A'B'C'D'E'M'G'H'K'L'$ равны, откуда же следует равенство прямой и косой призм.

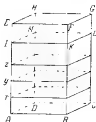
Эта корректив к доказательству Евклида была сделана еще в XVIII веке.

3). Лежандр о параллелепипедах с равными основаниями и с различными высотами. Мы приводим лежандрово доказательство теоремы²¹⁾: два параллелепипеда (или две призмы) AG и AL , имеющие одинаковые основания, относятся между собой, как высоты AE и AI (черт. 23).

Это необходимо нам, чтобы иметь в дальнейшем примеры арифметизированного метода исчерпывания, о котором будет идти речь в комментариях к книге XII Начал.



Черт. 22.



Черт. 23.

Предположим сначала, говорит Лежандр, что высоты AE и AI относятся, как целые числа, например как 15 к 8. Разделим AE на 15 равных частей, из которых 8 будут содержаться в AI , и через точки деления $x, y, z, \dots$ проведем плоскости, параллельные основанию. Эти плоскости пересекут AG на 15 частях параллелепипедов, которые равны между собой, так как имеют равные высоты и основания: высоты — потому, что они представляют равные деления $Ax, xy, yz, \dots$, а основания — потому, что всякое сечение $M'IKL$, параллельное основанию $ABCD$, равно ему (см. предложение 6 «Элементов» Лежандра).

Но так как 8 из 15 равных параллелепипедов заключаются в теле AL , то тела AG и AL относятся между собой, как числа 15 к 8, и вообще как высоты AE и AI .

В том случае, когда отношение высот AE и AI не может выразиться в целых числах, пропорция тело AG :тело $AL = AE:AI$ остается правильной.

Если бы эта пропорция не была справедлива, то можно было бы предположить, что тело AG :тело $AL = AE:AO$, где $AO < AI$.

²¹⁾ Цит. соч. (см. сноску 13), кн. VI, предл. 10, 11, 12, 15.

Тогда, разделив AE на равные части, каждая из которых меньше OI , мы получим бы одну из точек деления между O и I . Пусть это будет точка P (черт. 24), и пусть AR есть параллелепипед, имеющий основанием $ABCD$, а высотой AP .

Вследствие того, что высоты AE и AP относятся, как целые числа, получаем пропорцию: тело AG :тело $AR = AE:AP$. Но, по предположению, тело AG :тело $AL = AE:AO$. Следовательно, тело AL :тело $AR = AO:AP$. Отсюда следует, что тело AL должно быть *меньше* тела AR , тогда как оно *больше*.

Рассуждая подобным же образом, найдём, что невозможно и случай $AO < AI$, значит, $AO = AI$.

Таким образом, два прямых параллелепипеда, имеющих одинаковое основание, относятся, как высоты.

Мы здесь почти дословно выписываем доказательства из «Элементов Лежандра, чтобы дать представление не только о конструкции доказательства, но и о форме, выраженной для сравнения с той, которую находим в позднейших учебниках лежандрова типа, например Давыдова.

Рассмотренный приём доказательств теперь заменяется другим, который по существу представляет метод теории пределов, хотя понятие предела и здесь не выводится.

Сначала замечают, что если разделить AE на n равных частей, то в AI этих частей будет заключаться больше m и меньше $m+1$, так что

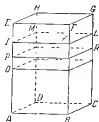
$$\frac{m}{n} < \frac{\text{тело } AG}{\text{тело } AL} < \frac{m+1}{n},$$

$$\frac{m}{n} < \frac{AI}{AE} < \frac{m+1}{n}.$$

Отсюда заключаюг о равенстве отношения тел и высот с *точностью* до $\frac{1}{n}$. Но число n может быть как угодно велико, значит, равенство отношений выполняется с *какой угодно точностью*, т. е. является *абсолютно точным*.

Теория пределов облекает это доказательство в форму:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\text{тело } AG}{\text{тело } AL} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n} \\ \frac{AI}{AE} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n} \end{aligned} \right\} \frac{\text{тело } AG}{\text{тело } AL} = \frac{AI}{AE}.$$



Черт. 24.

33. Тридцать четвертое предложение Евклида. Предложение 34, стоящее в длинной цепи теорем, определяющих объем параллелепипеда вызывает ряд замечаний.

Прежде всего необходимо отметить разницу позиций Евклида и современной. Для нас после того, как доказана теорема, касающаяся объема наклонной призмы (см. комментарий 31), легко получается формула объема любого параллелепипеда в виде произведения площади основания на высоту, и все теоремы, соответствующие предложениям 29—34, становятся очевидными следствиями из этой формулы. Указанная формула была, конечно, известна Евклиду, но она находится не впереди, а подлин указанных предложений, больше того, она лежит за пределами его книги. Евклид определяет только равенственность и отношение объемов двух параллелепипедов, абсолютная же величина объема одного данного параллелепипеда его интересует очень мало. Он все подготовил к выводу этой формулы, но самую формулу он предоставляет вывести уже не геометру-теоретику, но геодезисту-практику.

Является ли вполне безупречной цепь его логических рассуждений? Если выбросить предложения 26 и 27, устанавливающие возможность *построения* рассматриваемых объектов, а также вызывающее большие возражения предложение 28 о равенственности (равенстве) двух плоскостей параллелепипеда, получающихся от его сечения диагональной плоскостью, то вся цепь рассуждений Евклида восстанавливается в таком виде.

Предложение 24 о равенстве противоположных граней параллелепипеда (не надо забывать, что в книге XI Евклида равенство фигур сводится к равенству их элементов).

Предложение 25 об отношении объемов параллелепипедов с равными основаниями (лежащих в одной плоскости).

Предложения 29 и 30 о равенстве объемов параллелепипедов, построенных на одном и том же основании и имеющих одну и ту же высоту.

Предложение 31 о равенстве объемов параллелепипедов с одинаковыми основаниями и высотами (в доказательстве важно отметить последовательное применение предложения 25. Равенство тел в нашем смысле или, по Евклиду, в смысле равенства элементов, составляющих фигуру, дается определением 10; равенство же тел в смысле их равенственности Евклидом *доказывается*, причём сравниваются объёмы лишь непосредственно прилегающих друг к другу параллелепипедов).

Предложение 32 представляет обобщение предложения 25. *Предложение 33* определяет отношение объемов подобных параллелепипедов.

Наконец, рассматриваемое предложение 34 устанавливает, что в равных параллелепипедах основания обратно пропорциональны высотам. При доказательстве этого предложения Евклид делает несколько логических скачков.

В самом начале доказательства Евклид пользуется положением, что в равных параллелепипедах с равными основаниями будут равны и высоты. Это положение он устанавливает простой ссылкой на предложение 32 — параллелепипеды с равными высотами относятся, как основания, так что из равенства объемов вытекает и равенство высот. Такое легкое доказательство показалось недостаточным какому-то достаточно древнему переписчику, и он снабдил его разъяснением, стоящим у нас в квадратных скобках, ибо если бы при равных основаниях... и т. п., причём в худших манускриптах это разъяснение вытеснило подлинное доказательство Евклида — ссылку на предложение 32.

Дальше дело идёт ещё хуже. Евклид молчаливо допускает и даже без всякой ссылки, — что если у двух равных параллелепипедов основание одного будет больше, то у второго должна быть больше высота. Этот недостаток тоже был замечен древним переписчиком, который восполнил его мало удовлетворительным замечанием, также стоящим у нас в квадратных скобках: «ибо если не так, то опять, значит, ...» и т. д. Доказательство этого предположения легко может быть получено из предложения 31 путём приведения к абсурду. В самом деле, пусть у двух равных параллелепипедов основание S_1 первого больше основания S_2 второго; требуется доказать, что высота h_2 второго будет больше высоты h_1 первого. — Эти высоты не могут быть равными, ибо у параллелепипедов с равными высотами объёмы относятся, как основания, и, следовательно, объём первого был бы больше объёма второго. Не может h_2 быть и меньше h_1 , ибо если бы мы увеличили объём второго параллелепипеда, увеличив его высоту так, чтобы она сравнялась с h_1 , то все же и такой увеличенный объём был бы, по только что доказанному, меньше объёма первого параллелепипеда. Нужно, впрочем, отметить, что у Евклида отсутствует теорема о том, что параллелепипеды с равными основаниями относятся, как высоты (см. комментарий 32) хотя для цилиндров соответствующая теорема была им доказана (предложение 14 книги XII). Может быть, Евклид был настолько в плену общезвестной формулы объёма параллелепипеда (параллелепипеды или телесные числа арифметических книг), что считал очевидным, что при равенстве объёмов с уменьшением основания должна увеличиваться высота. Но тогда всё доказательство предложения 34 становится лишь геометрической интерпретацией хорошо известного арифметического факта (Н. В.).

31. История и методика определения объёма призмы. Во что вырождается в *прелажинровское* время вывод объёма призмы методом неведомых *Бетлонетно* *малые* превращаются просто в *очень малые*, из них извлекается их *метафизическое* содержание, но вместе с тем улегучивается и само доказательство.

Призмы и цилиндры для сокращения рассматриваются вместе. Для ознакомления читателя с шаткой и неясной терминологией учебником XVIII века, я приведу формулировку теоремы

и доказательство в том виде, как мы находим их в русском переводе Безу²²:

«Две призмы или два цилиндра с одинаковым основанием и с одинаковыми высотами или с равными основаниями и высотами будут в толщине [т. е. по объёму] равны, как бы ни были различны фигуры оснований».

Здесь интересно некоторое отклонение (правда, только в отношении тел) от евклидова равенства, которое, правда, ещё не равнозначность, а равенство «по толщине».

«Представь себе, — говорит Безу-Загорский, — что тела рас-сечены были бы плоскостями, параллельными их основаниям, на весьма тонкие слои, коих бы высота ничем не различество-вала от толстых точек, каковы по данному нами понятию напо-лнены сами тела. Сперва это тонкие слои, но затем оказываются толстыми точками».

Конечно, эти «толстые точки» суть неделимые Кавальери, и автор разъясняет этот странный термин именно в таком смысле, — «весьма тонкие» слои оказываются актуально беско-нечно тонкими слоями; он говорит:

«Дабы утвердиться в понятии, что мы должны разуметь под толщиной тел, надлежит представить себе мысленно частицу таких в кубическом виде пространства, которые бы были бес-конечно малы в длину, ширину и глубину, а потом вообразить, что внутренность тел вся наполнена подобными кубами, которые мы будем называть *толстыми точками*».

Интересно прибавление: «Совокупность сих точек есть точ-но то, что мы именем толщиной тела». Объём здесь не мы-слился, как у Евклида, как нечто само собой понятное, не при-водится к числу рациональному или иррациональному, как у Локандра, но мыслится как актуальная бесконечная сово-купность бесконечно малых элементов и если — как число, то только как число актуально бесконечно большое.

Продолжаем доказательство: «Далше явствует, что в каждом теле каждое сечение равно основанию, число толстых точек, составляющих каждый слой, будет во всех одинаково и равно числу поверхностных точек основания, как предположили мы в двух телах одинаковую высоту, то каждое из них будет сохранять одно число слоёв, а потому в целом и одинаковое число толстых точек, следовательно, они равны в толщине».

Весьма интересно сравнить этот абзац с выводом формул для площади прямоугольника и предлагаемым выводом по этому образу *формулы для объёма параллелепипеда* $v = abc$ у Бореля и уже отсюда — предложения Евклида об отношении двух параллелепипедов.

Для случая *симметричных* a, b, c эта формула легко выво-дится разделением данного параллелепипеда на элементарные

²² Безу, Курс: математики, перевод Загорского, М., 1796, стр. 158.

с измерениями, равными m , затем для рациональных $a = \frac{n}{m}$, $b = \frac{p}{m}$, $c = \frac{q}{m}$, беря измерения, равные $\frac{1}{m}$. Но в том случае, когда a , b , c выражаются *иррациональными* числами, в учебнике Бореля — Штеккеля употребляется следующий приём:

Стороны выражают десятичными дробями с *актуально бесконечными числами цифр*, например:

$$a = 3,41894\dots, b = 2,10673\dots, c = 5,61131\dots$$

и затем доказывает, что объём содержится между

$$(3,4) \cdot (2,1) \cdot (5,6) \text{ и } (3,5) \cdot (2,2) \cdot (5,7), \\ (3,41) \cdot (2,10) \cdot (5,61) \text{ и } (3,42) \cdot (2,11) \cdot (5,62), \\ \dots \dots \dots$$

Отсюда делают заключение: так как, продолжая этот процесс, мы можем получить постепенно все цифры произведения, одну за другой, то, значит, объём действительно равен произведению abc .

Метод Евклида и даже метод исчерпывания в лежандровой арифметизированной форме являются для школы слишком громоздкими. Нельзя вполне согласиться и с методом применения понятия предела в *нечёткой* форме. Здесь перетолкователем встаёт довольно трудная методическая проблема. Я думаю, что подход Бореля следует только несколько видоизменить, а именно, поступать по его образцу, доказывая пропорцию $v:v' = h:h'$ для параллелепипедов с равными основаниями

и с различными высотами, убеждая, что $\frac{v}{v'}$ и $\frac{h}{h'}$ выражаются десятичными дробями с той же целой частью, затем — с теми же *десятичными знаками* и т. д., следовательно, со всеми знаками после запятой.

35. Метод наложения. Следует отметить характерную черту Евклида: он пользуется методом наложения только на *плоскостях*.

Я полагаю, что в *его* время наложение или, лучше сказать, вложение тела в тело с проникновением одного в другое представлялось совершенно непримлемым. Софист мог согласиться с его постулатами, — с тем, что можно продолжать прямую, и даже с тем, что треугольники, совпадающие при наложении, равны (аксиома 8), но он никогда не мог бы согласиться с тем, что равенство может быть доказано теми операциями, которые употреблял Лежандр в III и IV книгах его «Элементов».

Лежандр³⁵⁾ доказывает, например, что *две призмы равны, если имеют по равному многогранному углу, заключающемуся*

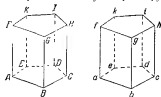
³⁵⁾ Цит. соч. (см. с. 135 13), кн. VI, предл. 3.

между тремя соответственно равными и подобными расположенными плоскостями.

Мы воспроизводим лежандрово доказательство, причём предлагаем читателю стать при его прочтении на античную точку зрения (черт. 25).

Если основание $ABCDE$ будет равно $abede$ (в современном, а не евклидовом смысле), параллелограмм $ABFG$ равен $abfg$, $BCFK = bcfk$ и т. д., то призма $ABCDEFGH$ будет равна (в современном смысле) призме $abdefgh$. Основание $ABCDE$ совмещается при наложении с равным ему основанием $abede$.

Далее Лежандр производит наложение боковой стороны одной призмы на боковую сторону другой. Что они в отдельности, по разрушении призмы, могут быть наложены — с этим Евклид согласился бы, но что может пронести вздох прикладная математика через материю, что неразрушенная призма совпадает с неразрушенной — этого не был бы в состоянии принять.



Черт. 25.

У Лежандра вследствие равенства трёхгранных углов, сходящихся в B и b , совмещаются и плоские углы, вследствие чего совпадают две стороны параллелограммов. То же относится и к остальным углам и параллелограммам. В результате совмещаются и все боковые грани и оба основания.

36. Предложение 37 в Болонском манускрипте. Из всех рукописей Евклида Болонская (XI века) представляет ту особенность, что даёт текст последних четырёх предложений книги XI и всю книгу XII в редакции, совершенно отличной от других рукописей Евклида. Доказательство предложения 36 в Болонской рукописи отличается лишь формой изложения, но доказательство предложения 37 дано в гораздо более развернутом виде, чем в других списках. Даем перевод последнего доказательства по второму приложению к IV тому сочинений Евклида в издании Гейберга, без чертежей, которые легко может построить каждый читатель, руководствуясь теми чертежами, которые помещены в основном тексте.

Предложение 37

«Если будет сколько угодно пропорциональных прямых, то и подобные и подобно расположенные параллелепипедальные тела на них будут пропорциональны. И если подобные и подобно расположенные параллелепипедальные тела на них пропорциональны, то и сами они будут пропорциональными.»

Пусть будет сколько угодно пропорциональных прямых AB , CD , EF , HG . (причём), как AB к CD , так EF к HG , построим на каждой из AB , CD , EF , HG подобные и подобно расположенные параллелепипедальные тела $AК$, CL , EM , HN . Я утверждаю, что будет как тело $AК$ к телу CL , так тело EM к телу HN . Действительно, сделаем, чтобы как AB к CD , так и CD к Q и Q к O . Значит, как первая к четвёртой, то-есть AB к O , так и (тело) на первой (то-есть) $то-есть$ «квадрат на первой — обычно так обозначается квадрат») то-есть $AК$ к (телу) на второй, то-есть CL : как же EF к HG , так и HG к P и P к R . Значит, будет, что как EF к R , так и (тело) EM к HN . И поскольку как AB к CD так и EF к HG , но как AB к CD , так и CD к Q и Q к O , как же EF к HG , так и HG к P и P к R , то по равенству, значит, будет как AB к O , так и EF к R . Но как $AК$ к CL , так тело $AК$ к телу CL , как же EF к R , так и тело EM к телу HN . Значит, как тело $AК$ к телу CL , так и тело EM к телу HN .

Затем, пусть вот будет, что как тело $AК$ к телу CL , так и тело EM к телу HN . Я утверждаю, что будет как AB к CD , так и EF к HG . Действительно, сделаем, чтобы как AB к CD , так и EF к ST , и построим на ST подобное HN и подобно расположенное параллелепипедальное тело SU . Поскольку как AB к CD , так и EF к ST , то, значит, и как тело $AК$ к телу CL , так и тело EM к телу SU . Значит, EM имеет то же самое отношение к каждому из HN , SU . Значит, HN будет равно SU и HG будет соответственной (линией) для ST . Значит, HG будет равна ST . И поскольку как AB к CD , так и EF к ST , а ST равна HG , то, значит, как AB к CD , так и EF к HG , что и требовалось доказать» (И. В.).

37. Симметрии параллелепипеда. Интересно проследить, каким образом в течение веков зарождалось учение о симметрии. Мы остановимся только на симметриях параллелепипеда и куба. У Евклида появляется ось симметрии, но только как характерная прямая без указания того, как расположены относительно неё части фигур (предложение 38). У Клавия выступает центр симметрии. Теорема Клавия гласит: *Если параллелепипед пересекается плоскостью, проходящей через центр, то он разсекается пополам, и если тело пересекается пополам, то плоскость проходит через центр.*

Это всё — только эмбрионы, из которых потом вырастает учение о симметрии, лежащее в основе кристаллографии.

В элементарную геометрию Лежандр вводит начатки учения о симметрии. Но он говорит только о симметрии относительно плоскости, причём даёт такое определение: две точки симметричны относительно плоскости, когда эта плоскость перпендикулярна в середине к прямой, соединяющей эти две точки. Лежандр видит в прямом параллелепипеде три плоскости симметрии, перпендикулярные к рёбрам, а в кубе — три плоскости, перпендикулярные к рёбрам, и шесть плоскостей, проходящих через диагонали граней.

В современных учебниках лежандрова типа говорится о симметрии значительно больше, чем у Лежандра. Руше и Комбервусс, например, говорят о симметрии относительно точки и прямой. Доказывается, что если плоская фигура обладает двумя взаимно перпендикулярными осями симметрии, то она симметрична и относительно их точки пересечения, и что если произвольная фигура симметрична относительно плоскости и прямой, ей перпендикулярной, то она симметрична и относительно их точки пересечения.

Таким образом, выявляются все симметрии параллелепипеда и куба, так что в последнем к $3P$ и $6P'$ ещё прибавляется C (относительно центра), $3L^4$ (три оси 4-го порядка через центры граней), $4L^2$ (четыре оси 3-го порядка через вершины) и $6L^2$ (шесть осей через середины ребер).

Если в учебниках лежандрова типа учение о симметрии является только «пристройкой», то в учебниках интуитивистического изложения, например у Бореля, оно кладётся в самую основу вывода. Он оперирует с геометрическим экспериментом, заставляющим пробуждаться интуицию.

Чтобы получить плоскую фигуру, симметричную данной относительно оси, расположенной в той же плоскости, накладывается плоскость на самую себя и переворачивается на другую сторону таким образом, чтобы ось симметрии до и после поворота занимала то же самое положение. Свойства симметрии доказываются с помощью теорем о равенстве треугольников; но затем дальнейшие свойства треугольников доказываются с помощью симметрии.

И существование у куба трех осей симметрии устанавливается экспериментом — совмещением с самим собой (вернее с двойником) при вращении около различных осей. Это — особого рода эксперимент, в котором конкретная модель куба комбинируется с воображаемым двойником куба.

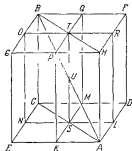
Борель не выявляет понятия *групп преобразований* многогранника в самого себя, но своим учением о симметрии подготовляет к восприятию этого понятия учеником.

38. Предложение 38 в Болонском манускрипте (Соч. Еммы в издании Гейберга, т. IV, стр. 388) *«Если у противоположных плоскостей куба стороны будут разложены пополам, через сечения же проведены плоскости, то общее сечение плоскостей разделит пополам диаметр куба и само разделится пополам диаметром куба».*

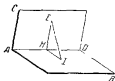
Пусть у противоположных плоскостей $CDAE$, $BFHG$ куба AB стороны CD , DA , AE , EC , BF , FH , HG , GB будут разделены пополам в K , L , M , N , Q , O , P , R , через сечения же проведены плоскости KM , PQ , NL , OR , и пусть общее сечение плоскостей будет ST , диаметр же куба — BA . Я утверждаю, что ST делит пополам диаметр куба (черт. 26).

Действительно, соединим CS , SA , BT , TH . Поскольку CE равна DA и половина CE есть CN , половина AD же — LA , то,

значит, CN будет равна LA ; также и SN равна SL . Вот две CN , NS равны двум LA , LS ; и угол CNS равен углу SLA ; значит, основание CS равно основанию SA и треугольник CNS будет равен треугольнику ALS , и остальные углы будут равны остальным углам, которые стягиваются равными сторонами. Значит, угол между CS , SN будет равен углу между LS , SA . Прибавим общий (угол) между NS , SA ; значит, (углы) между CS , SV , VS , SA будут равны (углам) между LS , SA , AS , SV . Но (углы) между LS , SA , AS , SN равны двум прямым, вот при некоторой прямой NS и при её точке S две прямые CS , SA , не расположенные с той же самой стороны, образуют смежные углы CSN , NSA , равные двум прямым. Значит, CS будет «по прямой» с SA . На основании того же вот и BT будет «по прямой» с TH . И поскольку каждая из CI , AH будет равна EG , а также и параллельна, параллельные же той же самой прямой, не находясь «с ней» в одной и той же плоскости, будут параллельны, то, значит, CB , AH будут равны и параллельны. И CA , BH суть соединяющие, и половина CA есть SA , половина BH же — BT . Значит, SA , BT будут равны и параллельны; и ST , AB суть соединяющие. Значит, SU будет равна UT , AU же — UB , что и требовалось доказать. (И. В.).



Черт. 26.



Черт. 27.

плоскости, то проведённый перпендикуляр упадёт на общее сечение этих плоскостей.

Пусть плоскость CD будет под прямыми (углами) к плоскости AB , общее же их сечение пусть будет DA ; возьмем на плоскости CD произвольную точку E ; и утверждаю, что проведённый из E на плоскость AB перпендикуляр упадёт на DA (черт. 27).

Действительно, если не так, то пусть, если возможно, он упадёт вне (вне) DA как FI , и пусть с плоскостью AB он

39. Другой вид предложения 38.

В четырёх рукописях, в том числе и основном кодексе Peutard'a (P), бодлеянской (B), флорентийской (F) и венском (V) предложение 38 читается совершенно иначе (Соч. Евклида и издания Гейберга, т. IV, стр. 354):

«Если плоскость перпендикулярна к плоскости, и из какой-нибудь точки в одной из этих плоскостей проведём перпендикуляр к другой

встретится в точке I , и пусть из I перпендикуляр на DA в плоскости AB будет IH , который будет под прямыми (углами) и к плоскости CD (определение 4), и соединим EH . Поскольку теперь IH будет под прямыми (углами) к плоскости CD касается же с? (прямая) EH , находящаяся в плоскости CD , то, значит, и угол IHE будет прямым (определение 3). Но и EI будет под прямыми (углами) к плоскости AB ; значит, угол EIH прямой. Вот у треугольника EIH два угла будут равны прямому; это же невозможно (предложение 17 книги 1). Значит, проведённый из F на плоскость AB перпендикуляр не упадёт вне DA . Значит, он упадёт на DA , что и требовалось доказать? ($H, B.$).

КОММЕНТАРИИ К КНИГЕ XII

1. Квадратура круга до Архимеда. История вопросов, связанных с определением длины окружности и квадратурой круга, начинается с самых истоков человеческой культуры. Многие хотели видеть число π отображенным уже в знаменитой пирамиде Хеопса. Угол наклона граней этой пирамиды составляет $51^{\circ}50'$ или, по более точным измерениям, $51^{\circ}52'$. Тангенсы обоих углов равны 1,272 и 1,274, что очень близко подходит к обратной величине $\frac{\pi}{4}$. Действительно, если для π им возьмем архимедовское значение $\frac{22}{7}$, то $\frac{\pi}{4}$ будет равно $\frac{11}{14}$; обратная величина

последнего числа будет 1,273. Длина стороны Хеопсовой пирамиды равняется по современным измерениям 228,6 метра. Если учесть толщину святого покрытия, то эта величина очень близко подходит к 230,3 метра, что представляет длину 440 египетских локтей. Высоту пирамиды мы получим умножением 220 локтей на $\text{tg } 51^{\circ}52' = \frac{4}{\pi}$; при архимедовом значении π это даст для высоты пирамиды 280 локтей. Однако делать из этого вывод, что египтяне не только знали число π , но и хотели отобразить его в великой пирамиде, не приходится; можно утверждать единственно лишь то, что пирамида построена таким образом, что длина периметра её основания равна длине окружности, описанной радиусом, равным её высоте:

$$4 \cdot 440 = 2 \cdot \frac{22}{7} \cdot 280.$$

Позднее, в эпоху математических нацирсов (Среднее царство) египтяне пользовались в качестве π значением немного большим, чем архимедовское, а именно, они считали круг равновеликим квадрату, сторона которого равна $\frac{8}{9}$ диаметра. Это даёт нам:

$$\frac{D^2}{4} = \left(\frac{8}{9} D\right)^2,$$

откуда

$$\pi = 4 \cdot \frac{64}{81} = 3,161.$$

тогда как $\frac{22}{7} \approx 3,143$. Интересно в этой связи отметить, что наряду с локтем в 28 дюймов (большим или «королевским») египтяне пользовались также локтями в 24 и 20 дюймов. Последний локоть употреблялся ими для получения фигуры с вдвое меньшей площадью

$$\frac{28}{20} = \frac{7}{5} = 1,4 \approx \sqrt{2}.$$

Для этого нужно было вместо подлежащей делению фигуры, данные сторон которой были даны в больших локтях, построить совершенно такую же, но только при построении большой локоть в 28 дюймов заменить нарым в 20 дюймов. Что касается локтя в 24 дюйма, то можно думать, что он употреблялся для получения приближенной квадратуры круга. Чтобы найти площадь круга, диаметр которого равнялся 4 большим локтям, нужно было построить квадрат со стороной 4 локтей по 24 дюйма. Действительно,

$$\frac{8}{9} \cdot 28 \approx 24.$$

Но если египтянам принадлежит честь постановки задачи о квадратуре круга, то египтяне имеют приоритет в определении числа π . Они считали π равным $\frac{22}{7}$; при вычислении площади круга исходили из длины окружности L , а именно считали, что площадь круга S равняется одной двенадцатой квадрата длины его окружности, т. е.

$$S = \frac{L^2}{12} = \frac{(\pi D)^2}{4\pi},$$

что соответствует значению $\pi = \frac{22}{7}$.

Новый подход к решению задачи о квадратуре круга был сделан греками; задачу *вычисления* площади круга они заменили задачей *построения* при помощи циркуля и линейки квадрата, равновеликого данному кругу. Первая попытка решения этой задачи была сделана греческим геометром второй половины V века до н. э. Гиппократом Хиосским, автором первых «Элементов». О введенных им «Гиппократовых луночках» рассказывается почти во всех учебниках геометрии; однако святого изложения всей теории Гиппократа на русском языке не имеется до сих пор, и здесь полезно будет восполнить этот пробел.

Теория Гиппократа дошла до нас в комментариях Симпликия (VI век н. э.) к Аристотелю, т. е. приблизительно через тысячу лет после Гиппократа.

Гиппократ исходил из следующих положений:

1) При увеличении диаметра круга в n раз площадь его увеличивается в n^2 раз.

2) Сумма площадей подобных фигур, построенных на катетах прямоугольного треугольника, равна аналогичной площади, построенной на гипотенузе.

На основании этого Гиппократ показывал, как можно построить квадрат, равновеликий данной криволинейной фигуре. Он строил на диаметре AB полуокруг, вписывал в него равнобедренный прямоугольный треугольник ABC и на одном из катетов последнего строил полуокруг AEC (черт. 1).

Поскольку квадрат со стороной AB будет вдвое больше квадрата на AC и поскольку квадраты диаметров будут друг к другу как соответствующие круги и полуокруги, то полуокруг ACB будет вдвое больше полуокруга AEC . Значит, квадрат ACD будет равен полуокругу AEC . Теперь, из фигуры $AECD$, образованной квадрантом и луночкой, вычтем сегмент, заключенный между стороной квадрата AC и дугой AC окружности. Тогда остающаяся луночка AEC будет равна остающемуся треугольнику ACD . Но треугольник может быть сделан равным некоторому квадрату. Мы таким образом показали, что луночку можно будет квадрировать...

Происхождение этой квадратуры Аллман¹⁾ реконструирует на основании следующего очень распространенного орнамента (черт. 2).

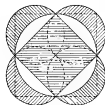
Большой круг будет равен сумме двух малых кругов или сумме четырех малых полуокругов, построенных на сторонах квадрата, вписанного в большой круг. Если отнять общие сегменты, то четыре внешних луночки будут равны внутреннему квадрату, вписанному в большой круг.

Доказывая, что луночки может быть квадрирована, Гиппократ показывает затем, как можно построить квадрат, равновеликий данному кругу или полуокругу:

«Пусть будет прямая AB и построенный на ней полуокруг (черт. 3). Возьмем CD , вдвое большую AB , и также построим на этой прямой полуокруг. Пусть CE , EZ , ZD будут сторонами вписанного в него шестигульника. Построим на этих сторонах полуокруги... Тогда каждый из этих описанных на сторонах шестигульника полуокругов будет равен полуокругу, построенному на AB , ибо AB равна стороне шестигульника. Четыре полуокруга будут равны друг другу и вместе дадут четыре раза взятый полуокруг AB . Но полуокруг CD также будет четыре раза взятый полу-



Черт. 1.



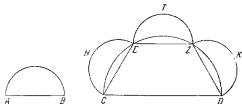
Черт. 2.

¹⁾ Allman, Greek Geometry from Thales to Euclid, стр. 97. См. также Rey, L'Apogée de la science technique grecque, Paris, 1948, стр. 98.

круг AB . Значит, построенный на CD полукруг будет равен четырём полукругам, именно, полукругу, построенному на AB , и трём полукругам, построенным на сторонах шестиугольника.

Вычтем из полукругов, построенных на сторонах шестиугольника, а также из полукруга, построенного на CD , общие сегменты, заключающиеся между сторонами шестиугольника и окружностью полукруга CD . Оставшиеся луночки CHE , ETZ , ZKD вместе с полукругом, построенным на AB , будут равны трапеции $CEZD$.

Если теперь мы вычтем из трапеции сумму площадей луночек (ибо доказано существование прямолинейной фигуры, рав-



Фиг. 8.

ной луночке), то мы получим остаток, равный полукругу AB . Удвоим остающуюся прямолинейную фигуру и построим квадрат, который был бы этому равен. Этот квадрат будет равен кругу, диаметром которого была AB , и таким образом круг будет сквadrирован.

Ошибку в этом рассуждении, заключающую в том, что возможность квадратуры луночки, построенной на стороне квадрата, была отождествлена с возможностью квадрирования луночки, построенной на стороне шестиугольника, по всей вероятности заметил уже сам Гиппократ, ибо кроме квадратуры луночки, построенной на стороне вписанного в круг квадрата, он дал способы квадратуры луночек ещё в двух случаях, когда они построены на хордах сегментов, вмещающих не только прямой, но также острый и тупой углы.

Общее решение задачи о квадратуемости луночки было дано Клаудионом (Crelle's Jour., t. 31, стр. 375—376).

Если через R обозначим радиус, а через x — половину центрального угла внутренней дуги луночки, через r и y — радиус и половину центрального угла внешней дуги луночки, то эти величины будут связаны между собой уравнением

$$R \sin x = r \sin y.$$

Площадь луночки выразится формулой

$$R - r^2y = R^2x + \frac{1}{2}(R \sin 2x - r^2 \sin 2y).$$

Для квадратируемости луночки необходимо, чтобы

$$r^2y - R^2x = 0$$

Если положить

$$y = 2mx,$$

то будет

$$R = r^2 \frac{1}{2} m,$$

$$\sin mx = \frac{1}{2} \frac{m}{m} \sin x,$$

$$S = \frac{r^2}{2} (m \sin 2x - \sin 2mx).$$

Решения Гиппократа соответствуют значениям

$$m = 2, \quad m = 3, \quad m = \frac{3}{2}.$$

Долгое время считали, что квадратура возможна только в этих трёх случаях; однако Кэузер показал, что она также возможна для $m = 5$ и $m = \frac{5}{3}$.

Следующий шаг на пути к решению задачи скоро после Гиппократа был сделан Антифоном, который вписывал в круг квадрат, затем восьмиугольник, двенадцатиугольник и т. д. и считал, что при достаточном увеличении числа сторон многоугольника окружность вследствие атомистического строения пространства должна совпасть с периметром вписываемого многоугольника. Эта идея вместе с обобщенной теорией отношений привела Евдокса к открытию метода исчерпывания, являющегося основным стержнем всей XII книги «Начал».

Принадлежность этого метода Евдоксу устанавливается двумя свидетельствами Архимеда.

В предисловии к первой книге сочинения «О шаре и цилиндре» он говорит:

«Поэтому мне, пожалуй, не следует бояться сопоставить их с исследованиями других геометров и теми предложениями Евдокса о телах, которые считаются наиболее важными, а именно, что каждая пирамида равна трети призмы, имеющей то же основание и ту же высоту, что и пирамида, и что каждый конус равен трети цилиндра, имеющего то же основание и ту же высоту, что и конус... Эти предложения... были неизвестны тем замечательным геометрам, которые жили до Евдокса...»

Во введении к книге «О квадратуре параболы» Архимед, упомянув о посягающей его имя аксеме — что «нибыток из который большая из двух неравных площадей превосходит меньшую,

будучи прибавляем к себе самому, может быть сделан больше любой заданной ограниченной площади», — прибавляет:

«Более древние геометры (и «прототип» теоретик) также пользовались этим вспомогательным предложением, ибо при использовании этого предложения они показали, что круги относятся, как квадраты их диаметров, а шары — как кубы диаметров и далее, что каждая пирамида равна трети призмы, имеющей то же основание и ту же высоту, что пирамида, что каждый конус равен трети цилиндра имеющего то же основание и ту же высоту, что и конус; они доказали это с помощью леммы, которая похожа на предыдущую».

Лемма эта дана в первом предложении книги X («Начала»; при ее помощи доказывается теорема о том, что круги относятся, как квадраты их диаметров (Евклид, XII, 1—2), что пирамида равна трети призмы с теми же основанием и высотой (Евклид, XII, 3—7), что конус равен трети цилиндра с теми же основанием и высотой (Евклид, XII, 10) и, наконец, что шары относятся, как кубы диаметров (Евклид, XII, 16—18). Все эти предложения представляют особую, ярко выраженную группу; они объединены в одну группу Архимедом во второй из приведенных нами цитат, а так как в первой цитате Архимед приписывает авторство двух из этих теорем Евдоксу, то вряд ли можно сомневаться в принадлежности Евдоксу и остальных, т. е. по существу всей XII книги. За это говорят и то обстоятельство, представляющееся нам несколько странным, что Евклид в *стереометрических книгах* поместил два предложения о круге, которым с большим основанием принадлежало бы место в конце VI книги — последней планиметрической.

Идея евклидовского доказательства 2-го предложения состоит в следующем.

Имеем два круга $ABCD$ и $EIHG$; требуется доказать, что их площади S_1 и S_2 относятся, как квадраты их диаметров

$$S_1:S_2 = BD^2:IG^2. \quad (1)$$

Докажем сначала, что отношение площадей не может быть меньше отношения квадратов их диаметров. Действительно, если бы мы имели

$$\frac{BD^2}{IG^2} < \frac{S_1}{S_2}, \quad (2)$$

то мы могли бы найти такую площадь S , чтобы существовало равенство

$$BD^2:IG^2 = S_1:S,$$

так что

$$\frac{S_1}{S} < \frac{S_1}{S_2},$$

откуда следовало бы $S < S_2$.

Тогда, вписывая в круг $EIHG$ квадрат, затем восьмиугольник, шестнадцатиугольник и т. д., мы можем в конце концов получить правильный многоугольник, площадь которого Σ_2 была бы больше S . Вписываем такой же многоугольник в первый (большой) круг $ABCD$, пусть площадь этого многоугольника будет Σ_1 . Тогда мы можем заключить по предложению 1, XII

$$\frac{\Sigma_1}{\Sigma_2} = \frac{BD^2}{IG^2}.$$

Если мы увеличим первый член первого отношения (заменяв Σ_1 через S_1) и уменьшим второй (взяв S вместо Σ_2), то будем иметь

$$\frac{S_1}{S} > \frac{BD^2}{IG^2},$$

что противоречит сделанному предположению. Таким образом, доказано, что отношение площади большего круга к меньшему не может быть меньше отношения квадратов их диаметров.

Чтобы доказать, что оно не может быть больше, вводим противоположное допущение:

$$\frac{BD^2}{IG^2} < \frac{S_1}{S_2}.$$

Перевёртываем члены этих отношений

$$\frac{IG^2}{BD^2} > \frac{S_2}{S_1}$$

и доказываем невозможность этого неравенства аналогичным методом — только теперь нам придется вписывать многоугольник с площадью S в больший круг $ABCD$. Из невозможности существования неравенств (2) и (3) вытекает справедливость равенства (1).

Можно было бы сделать следующее возражение относительно принадлежности Евдоксу доказательства предложения 2, XII и других. Архимед говорит о том, что все четыре теоремы доказаны на основании так называемой аксиомы Архимеда — сколь угодно малая заданная величина, будучи повторена слагаемыми достаточное число раз, может превзойти любую сколь угодно большую заданную величину — в то время как предложение 1, X говорит о другом — если из данной величины вычесть больше её половины, затем из остатка — больше его половины и т. д., то в конце концов остаток может быть сделан меньше любой заданной сколь угодно малой величины. Однако это возражение теряет силу, если посмотреть более внимательно на доказательство предложения 1, X. Там говорится, что если данная величина будет AB , а любая заданная сколь угодно малая величина будет ϵ , то ϵ , будучи повторена слагаемыми достаточное число раз, в конце концов превзойдёт AB , а это и есть так называемая

аксиома Архимеда, которая по существу уже содержится в определении 4 книги V «Начала» (И. В.).

2. «Измерение круга» Архимеда. Следующий шаг на пути к решению задачи о квадратуре круга был сделан Архимедом. Посвященное этому вопросу сочинение Архимеда «Измерение круга» (*Μέτρον κύκλου*) дошло до нас, по видимому, в не совсем полном виде и некоторые детали его вычислений не представляются нам совершенно ясными. В частности, возникает вопрос о том, какими способами Архимед извлекал квадратные корни из встречающихся в тексте чисел. Эти способы не были ясны даже



Черт. 4.

древним комментаторам; так, известный комментатор Архимеда Евтокий Аскадонский (VI в. н. э.) ограничивается в своем комментарии лишь тем, что проверяет умножением правильность найденных Архимедом приближенных значений корней.

Трактат Архимеда начинается с теоремы:

Площадь каждого круга равна прямоугольному треугольнику, в котором один из катетов равен радиусу, а другой — окружности круга.

Пусть $ABCD$ будет данный круг, а K — упомянутый треугольник (черт. 4).

Если бы круг не был равен K , то он должен был бы быть или больше, или меньше.

Пусть, если возможно, круг будет больше, чем K .

Вписав в него квадрат $ABCD$, разделим пополам дуги AB , BC , CD , DA , разделим пополам (если нужно) эти половины и т. д. до тех пор, пока стороны вписанного многоугольника, вершины которого суть точки деления, не будут отсекал сегментов, сумма площадей которых меньше избытка площади круга над K .

Тогда площадь многоугольника будет больше K . Пусть AE будет одной из его сторон и ON опущенный из центра O на AE перпендикуляр. Тогда ON будет меньше радиуса круга и, значит, не больше одного из катетов K . Точно так же периметр многоугольника будет меньше длины окружности, т. е. меньше другого катета K . Значит, площадь многоугольника будет меньше K ; это же противоречит сделанному предположению. Значит, площадь круга не будет больше K .

Пусть, если возможно, круг будет меньше, чем K . Опшем около круга квадрат, и пусть две соседние стороны, касающиеся круга в E и H , пересекают друг друга в T . Разделим пополам дугу между соседними точками касания и проведём в точках деления касательные. Пусть A будет середина дуги EH и FAG — касательная в A прямая. Тогда угол TAG будет прямым. Значит, TG больше OA и iH . Значит треугольник FTO будет больше половины площади $TEAH$. Разделим теперь пополам дугу AH и построим в её середине касательную, она отсечёт от площади GAH более её половины. Если мы будем продолжать таким образом, то придём в конце концов к описанному многоугольнику, такому, что находящиеся между ним и окружностью круга площадочки будут вместе взяты меньше избытка K над площадью круга. Значит, площадь многоугольника будет меньше K . Но так как опущенный из O перпендикуляр на какую-нибудь сторону многоугольника равен радиусу круга, в то время как периметр многоугольника больше окружности круга, то площадь многоугольника должна быть больше, чем треугольник K , что невозможно. Значит, площадь круга не будет меньше K .

Так как теперь площадь круга не может быть ни больше, ни меньше K , то она должна быть равна K .

Второе предложение читается так:

«Площадь круга относится к квадрату на его диаметре, как π к 16 ».

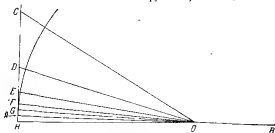
Ясно, что формулировка этого предложения уже предполагает архимедово значение $\pi = \frac{22}{7}$, а поэтому рассматриваемое предложение стоит не на своём месте, ибо соответствующая величина π устанавливается лишь в предложении 3, которое читается так:

«Отношение окружности круга к его диаметру меньше, чем $3\frac{1}{7}$, но больше, чем $3\frac{10}{71}$ ».

Изложение доказательства этого предложения мы дадим в более детальной форме, чем у Архимеда, чтобы сделать его более понятным читателю.

Пусть AB будет диаметр какого-нибудь круга, O — его центр, AC — касательная в A и угол $A\hat{X}C$ — третья часть прямого угла (черт. 5). Тогда $OA:AC = \operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3}:1 = \frac{263}{153}$.

Мы сразу встречаемся здесь с приближенной величиной $\sqrt{3}$. Как Архимед нашёл эту величину? Очень красивое решение этого вопроса было предложено Гульчем. Гульч рассматривает это значение вместе с другим приближенным значе-



Черт. 5.

нием $\sqrt{3}$ — теперь уже по избытку, — которое дано Архимедом в последующем изложении и равно $\frac{1351}{780}$. Итак, имеем соотношение

$$\frac{1351}{780} > \sqrt{3} > \frac{265}{153}.$$

Разлагая знаменатели на множители, будем иметь:

$$\begin{aligned} 780 &= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13 = 3 \cdot 5 \cdot 52, \\ 153 &= 3 \cdot 3 \cdot 17 = 3 \cdot 51. \end{aligned}$$

Сразу бросается в глаза наличие двух близких чисел, 51 и 52, в обоих знаменателях. Если мы умножим второй знаменатель на 5, то архимедовы приближенные значения уложатся в следующую формулу:

$$\frac{1351}{15 \cdot 52} > \sqrt{3} > \frac{1325}{15 \cdot 51}$$

или

$$\frac{1351}{52} > 15 \sqrt{3} > \frac{1325}{51},$$

или

$$26 - \frac{1}{52} > 15 \sqrt{3} > 26 - \frac{1}{51}.$$

Теперь

$$26 - \frac{1}{52} = \sqrt{26^2 - 1 + \left(\frac{1}{52}\right)^2} > \sqrt{26^2 - 1} = 1 \cdot 675.$$

Значит,

$$\frac{1}{15} \left(26 - \frac{1}{52} \right) > \sqrt{\frac{675}{15}} = \sqrt{\frac{675}{225}} = \sqrt{3}.$$

Теперь процесс получения $\sqrt{3}$ становится уже ясным. По таблице квадратов подыскивались два числа, квадрат одного из которых приблизительно был бы в три раза больше другого. Если мы примем, что разность между этими квадратами равняется единице, то искомому требованию будут удовлетворять следующие пары чисел:

$$\begin{array}{l} 4 \text{ и } 7, \quad 3 \cdot 4^2 - 1 = 7^2, \\ 15 \text{ и } 26, \quad 3 \cdot 15^2 - 1 = 26^2. \end{array}$$

Первые два числа дали бы нам

$$\sqrt{3} = \sqrt{\frac{49-1}{16}} \approx \frac{1}{4} \left(7 - \frac{1}{14} \right) = \frac{97}{56},$$

вторые же:

$$\sqrt{3} = \sqrt{\frac{26^2-1}{15}} \approx \frac{1}{15} \left(26 - \frac{1}{52} \right).$$

Самые извлечения корня могли быть произведены по вавилонской формуле:

$$\sqrt{48} = \frac{1}{2} \left(7 + \frac{48}{7} \right) = \frac{49+48}{2 \cdot 7} = \frac{97}{14} = 7 + \frac{1}{14},$$

$$\sqrt{675} = \frac{1}{2} \left(26 + \frac{675}{26} \right) = \frac{1351}{52} = 26 - \frac{1}{52}.$$

Оба эти приближения будут по избытку. Чтобы получить приближения по недостатку, достаточно, как нетрудно показать, уменьшить на единицу знаменатель вычитаемого:

$$\frac{1}{4} \left(7 - \frac{1}{14} \right) > \sqrt{3} > \frac{1}{4} \left(7 - \frac{1}{13} \right),$$

$$\frac{1}{15} \left(26 - \frac{1}{52} \right) > \sqrt{3} > \frac{1}{15} \left(26 - \frac{1}{51} \right),$$

что дало бы следующие приближенные значения $\sqrt{3}$:

$$\frac{97}{56} > \sqrt{3} > \frac{90}{52} = \frac{45}{26},$$

$$\frac{1351}{780} > \sqrt{3} > \frac{1325}{765} = \frac{265}{153}.$$

Из этих двух приближений Архимед воспользовался вторым, более точным.

Следует заметить, что описанный вавилонский приём извлечения корня засвидетельствован на греческой почве в «Метрике» Герона, а приём получения значения корня по недостатку путём вычитания единицы из знаменателя имеется у арабского математика XI века Аль-Кархи, большого поклонника греческих математических теорий.

Дальнейшие рассуждения Архимеда идут таким образом.

$$\frac{OA}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{263}{153},$$

$$\frac{OC}{CA} = \frac{2}{1} = \frac{306}{153}.$$

Проводим линию OD , делящую угол AOC пополам и пересекающую AC в D . Тогда, по теореме о биссектрисе (Евклид. VI, 3),

$$\frac{CO}{OA} = \frac{CD}{DA}.$$

Отсюда, составляя производную пропорцию со сложением, получим:

$$\frac{OC + OA}{OA} = \frac{CD + DA}{DA},$$

или

$$\frac{OC + OA}{CA} = \frac{OA}{DA}.$$

Значит,

$$\frac{OA}{DA} = \frac{OC + OA}{CA} = \frac{263 + 306}{153} = \frac{571}{153}.$$

Отсюда

$$\frac{OD^2}{AD^2} = \frac{OA^2 + AD^2}{AD^2} > \frac{571^2 + 1 \cdot 3^2}{153^2} = \frac{349450}{153^2},$$

так что

$$\frac{OD}{DA} > \frac{\sqrt{349450}}{153}.$$

Переименим этот знаменатель — найти с недостатком квадратный корень из 349450.

Мы предполагаем, что Архимед имел в своём распоряжении таблицу квадратов чисел от 1 до 100. Из неё он мог узнать, что $59^2 = 3481$, что дало бы ему первое приближение для корня, равное 590. Второе приближение (с избытком) он мог найти по вавилонскому методу:

$$\sqrt{349450} = \frac{1}{2} \left(590 + \frac{349450}{590} \right) = 591 \frac{17}{2 \cdot 59} \approx 591 \frac{1}{7}.$$

Приближение с недостатком Архимед берёт $591 \frac{1}{8}$, что сделало более лёгкими дальнейшие вычисления.

На первом этапе вычисления Архимед нашёл, что для правильного описанного 12-угольника отношение гипотенузы OD к половине стороны AD будет больше дроби

$$\frac{OD}{AD} > \frac{591 \frac{1}{8}}{153}.$$

Начнём второй этап. Пусть OE будет биссектриса угла AOD и пусть она пересекает AD в E . Тогда по той же теореме о биссектрисе

$$\frac{OD}{OA} = \frac{ED}{AE},$$

где AE — дугная нам половина стороны 24-угольника. Применяя аналогично проводимую пропорцию со сложением и переставляя накрест члены, будем иметь:

$$\frac{OD + OA}{AD} = \frac{OA}{AE}.$$

Следовательно,

$$\frac{OA}{AE} = \frac{OD + OA}{AD} > \frac{591 \frac{1}{8} + 571}{153} = \frac{1162 \frac{1}{8}}{153}.$$

Далее,

$$OE^2 = OA^2 + AE^2.$$

Значит,

$$\frac{OE^2}{AE^2} > \frac{\left(1162 \frac{1}{8}\right)^2 + 153^2}{153^2}.$$

Нам придётся извлекать корень из суммы двух квадратов. Так как Архимед далее не продолжает возведений в квадраты и суммирования найденных результатов, то не будем делать этого и мы, а просто применим вавилонский метод определения гипотенузы:

$$\sqrt{\left(1162 \frac{1}{8}\right)^2 + 153^2} = 1162 \frac{1}{8} + \frac{153^2}{2 \cdot 1162 \frac{1}{8}}.$$

Дело идёт о вычислении последнего слагаемого. Мы его получим, если разделим $153^2 = 23\,409$ на $2324 \frac{1}{4}$. Выполняя деление,

изходим, что частное равно $10 \frac{169}{2324 \frac{1}{4}}$. Отбрасывая дробную

часть, получаем, что

$$OE = 1162 \frac{1}{8} + 10 = 1172 \frac{1}{8},$$

и отношение

$$\frac{OE}{AE} < \frac{1172 \frac{1}{8}}{153}.$$

Начинается третий этап, где мы имеем дело со стороной описанного 48-угольника.

Пусть линия OP делит пополам угол AOE и пересекает AE в точке P . Тогда, рассуждая аналогично предыдущему, получим:

$$\frac{OE}{OA} = \frac{FE}{AE}; \quad \frac{OE}{OA} = \frac{OA}{AP};$$

$$\frac{OA}{AP} = \frac{OF + OA}{AE} > \frac{1172 \frac{1}{8} + 1162 \frac{1}{8}}{153} = \frac{2334 \frac{1}{4}}{153}.$$

Отсюда находим:

$$\frac{OF^2}{AP^2} = \frac{\left(2334 \frac{1}{4}\right)^2 + 153^2}{153^3}.$$

Далее,

$$\sqrt{\left(2334 \frac{1}{4}\right)^2 + 153^2} = 2334 \frac{1}{4} + \frac{153^2}{2 \cdot 2334 \frac{1}{4}}.$$

Разделив $153^2 = 23\,409$ на $4668 \frac{1}{2}$, получаем в частном $5 \frac{66}{4668 \frac{1}{2}}$.

Отбрасывая дробь, находим архимедову величину отношения:

$$\frac{OF}{AP} < \frac{2339 \frac{1}{4}}{153}.$$

На четвертом этапе пусть OG делит пополам угол AOF и пересекает AF в точке G . Тогда мы будем иметь:

$$\frac{OF}{OA} = \frac{FG}{AG}; \quad \frac{OF + OA}{OA} = \frac{FG + AG}{AG};$$

$$\frac{OA}{AG} = \frac{OF + OA}{AF} > \frac{2339 \frac{1}{4} + 2334 \frac{1}{4}}{153} = \frac{4673 \frac{1}{2}}{153}.$$

Вся предварительная работа закончена, и Архимед переходит к выводам:

«Теперь угол AOC , представляющий треть прямого угла, мы делим пополам четыре раза, и значит, угол AOG есть $\frac{1}{48}$ прямого угла.

Построим с другой стороны OA угол AON , равный углу AOG , и пусть ON пересекает в H продолжение OA .

Тогда угол GON будет $\frac{1}{24}$ прямого угла. Значит, GN будет стороной описанного около круга правильного 96-угольника. Так как

$$\frac{OA}{AG} > \frac{4673 \frac{1}{2}}{153} \quad \text{и} \quad AB = 2OA, \quad GN = 2AG,$$

то отсюда следует, что отношение AB к периметру 96-угольника больше, чем

$$\frac{4673 \frac{1}{2}}{153 \cdot 96} = \frac{4673 \frac{1}{2}}{14\,688}.$$

Но

$$\frac{14\,688}{4673 \frac{1}{2}} = 3 + \frac{667 \frac{1}{2}}{4673 \frac{1}{2}} < 3 + \frac{667 \frac{1}{2}}{4672 \frac{1}{2}} = 3 \frac{1}{7}.$$

Таким образом, окружность круга, которая меньше периметра описанного 96-угольника, и полагно будет меньше, чем взятый $3 \frac{1}{7}$ раз диаметр круга.

Найдя высший предел для π , Архимед переходит к определению нижнего предела:

«Пусть AB будет опять диаметр круга и дуга BC начерчена так, что угол CAB будет третьей частью прямого угла. Соединим C с B (черт. 6). Тогда

$$AC:CB = \sqrt{3}:1 < 1351:780.$$

Сперва разделим пополам угол BAC линией AD , которая пересекает BC в d и круг в D . Соединим B с D . Тогда

$$\angle BAD = \angle DAC = \angle ABD$$

и прямой угол BdD будет общим в обоих треугольниках ADB и BdD . Значит, треугольники ADB , BdD подобны.

Поэтому мы будем иметь:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{BD}{Dd} = \frac{AB}{Bd}.$$

Теперь, по свойствам биссектрисы угла (Евклид, VI, 3),

$$\frac{AB}{Bd} = \frac{AC}{Cd},$$

и далее:

$$\frac{AC}{Cd} = \frac{AB + AC}{Bd + Cd} = \frac{AB + AC}{BC},$$

или

$$\frac{AB + AC}{BC} = \frac{AD}{DB}.$$

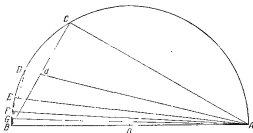
Но,

$$\frac{AC}{CB} < \frac{1351}{780}, \quad \frac{AB}{BC} = \frac{2}{1} = \frac{1560}{780}.$$

Отсюда следует:

$$\begin{aligned} \frac{AD}{DB} &< \frac{1351 + 1560}{780} = \frac{2911}{780}, \\ AB^2 = AD^2 + BD^2 &< \frac{2911^2 + 780^2}{780^2}. \end{aligned}$$

Сторона в числителе суммы квадратов равна 9 082 321; таким образом мы приходим к извлечению квадратного корня из 9 082 321.



Черт. 6.

Применяем вавилонский способ извлечения квадратного корня, взяв в качестве первого приближения 3000; будем иметь:

$$\begin{aligned} \sqrt{9\,082\,321} &= \frac{1}{2} \left(3000 + \frac{9\,082\,321}{3000} \right) = \frac{1}{2} \left(3000 + 3027 \frac{1321}{3000} \right) = \\ &= 3013 \frac{1}{2} + \frac{1321}{2 \cdot 3000}. \end{aligned}$$

Последнюю дробь Архимед округляет до $\frac{1}{4}$ и таким образом получает:

$$\frac{AB}{BD} < \frac{3013 \frac{3}{4}}{780}.$$

Далее, пусть AE разделит пополам угол BAO и пересечёт круг в E ; соединим E с B . Тогда совершенно так же, как и выше, мы докажем, что

$$\frac{AE}{EB} = \frac{AB}{BD} < \frac{3013 \frac{3}{4} + 2911}{780} = \frac{5924 \frac{3}{4}}{780}.$$

Оба члена этого отношения Архимед умножает на 4 и затем сокращает общий множитель 13:

$$\frac{AE}{EB} < \frac{23\,699}{4\,780} = \frac{1823}{240}.$$

Отсюда можно получить отношение

$$\frac{AB^2}{BE^2} = \frac{AE^2 + EB^2}{BE^2} < \frac{1823^2 + 240^2}{240^2}.$$

Приходится извлекать корень из суммы квадратов $1823^2 + 240^2$. По вавилонской формуле имеем:

$$\sqrt{1823^2 + 240^2} = 1823 + \frac{1}{2} \cdot \frac{240^2}{1823} = 1823 + \frac{31\,600}{2 \cdot 1823}.$$

Деление 31 600 на 1823 даёт в частном 15 и в остатке 1455. Таким образом, искомый корень будет равен

$$1823 + 15 \frac{1455}{1823} = 1838 \frac{1455}{1823}.$$

Вместо последней дроби у Архимеда стоит дробь $\frac{9}{11}$, что представляет довольно хорошее приближённое значение вышеприведённой дроби.

Таким образом было получено архимедово значение отношения

$$\frac{AB}{BE} = \frac{1838 \frac{9}{11}}{240}.$$

На третьем этапе пусть AF делит пополам угол BAE и пересекает круг в F . Тогда получается:

$$\frac{AF}{FB} = \frac{AB + AF}{BE} < \frac{1838 \frac{9}{11} + 1823}{240} = \frac{3661 \frac{9}{11}}{240}.$$

Если мы умножим обе части нашего отношения на **11**, то получим:

$$\frac{3661}{240} = \frac{40\,271 + 9}{11 \cdot 240} = \frac{40\,280}{11 \cdot 240} = \frac{1007}{66}$$

после сокращения на 40 числителя и знаменателя.

Таким образом,

$$\frac{AF}{FB} < \frac{1007}{66},$$

$$\frac{AF^2}{FB^2} = \frac{AF^2 + FB^2}{FB^2} < \frac{1007^2 + 66^2}{66^2}.$$

Отсюда находим отношение $\frac{AB}{FB}$:

$$\sqrt{1007^2 + 66^2} = 1007 + \frac{66^2}{2 \cdot 1007} = 1007 + 2 \frac{164}{1007} \approx 1009 \frac{1}{6}.$$

$$\frac{AB}{FB} < \frac{1009 \frac{1}{6}}{66}.$$

На четвёртом этапе угол BAF делится пополам линией AG , которая пересечёт круг в G . Тогда будет:

$$\frac{AG}{GB} = \frac{AR + AF}{BF} < \frac{1009 \frac{1}{6} + 1007}{66} = \frac{2016 \frac{1}{6}}{66},$$

$$\frac{AB^2}{BG^2} = \frac{AG^2 + GB^2}{GB^2} < \frac{\left(2016 \frac{1}{6}\right)^2 + 66^2}{66^2}.$$

Извлечение квадратного корня из числителя даёт нам:

$$\sqrt{\left(2016 \frac{1}{6}\right)^2 + 66^2} = 2016 \frac{1}{6} + \frac{66^2}{2 \cdot 2016 \frac{1}{6}} = 2016 \frac{1}{6} + \frac{2178}{2016 \frac{1}{6}}$$

$$= 2016 \frac{1}{6} + 1 \frac{161 \frac{5}{6}}{2016 \frac{1}{6}} \approx 2016 \frac{1}{6} + 1 \frac{1}{12}.$$

Таким образом,

$$\frac{AB}{BG} < \frac{2017 \frac{1}{4}}{66},$$

откуда следует, что

$$\frac{BG}{AB} < \frac{66}{2017 \frac{1}{4}}.$$

После этого Архимед заключивает вывод так:

«Значит, BG есть сторона вписанного правильного многоугольника с 96 сторонами. Из полученного отношения вытекает:

$$\frac{\text{Периметр 96-угольника}}{AB} > \frac{96 \times 66}{2017 \frac{1}{4}} = \frac{6336}{2017 \frac{1}{4}}.$$

И будет, что

$$\frac{6336}{2017 \frac{1}{4}} = 3 \frac{284 \frac{1}{4}}{2017 \frac{1}{4}} = 3 \frac{1137}{8069} > 3 \frac{10}{71} ».$$

Чтобы объяснить получение последнего отношения, Гульч увеличивает на единицу знаменатель 8069. Тогда

$$\frac{1137}{8070} = \frac{379}{2690}.$$

Величина последнего отношения лежит между $\frac{1}{7}$ и $\frac{1}{8}$,

$$\frac{1}{7} > \frac{379}{2690} > \frac{1}{8}.$$

У Паппа²⁾ доказывается теорема:

$$\text{если } \frac{a}{b} > \frac{c}{d}, \text{ то } \frac{a}{b} > \frac{a+c}{b+d} \text{ и } \frac{a+c}{b+d} > \frac{c}{d}.$$

На основании этой теоремы

$$\frac{379}{2690} > \frac{379+1}{2690+8} > \frac{1}{8}$$

или

$$\frac{379}{2690} > \frac{10}{71} > \frac{1}{8}.$$

Последние слова трактата Архимеда гласят:

«Таким образом и подалее окружность круга больше, чем взятый $3 \frac{10}{71}$ раз диаметр. Следовательно, отношение данной окружности к диаметру менее, чем $3 \frac{1}{7}$, и более, чем $3 \frac{10}{71}$ ».

²⁾ Паппа, Bibliotheca Mathematica, кн. VII, изд. Hultsch, т. III, стр. 689.

Полученные Архимедом границы значения π в десятичных дробях будут:

$$3\frac{1}{7} = 3,14286,$$

$$3\frac{10}{71} = 3,14084.$$

Они дают три верных знака для π (И. В.).

3. История вычисления π . После Архимеда Аполлоний Пергский, по свидетельству Евтокия Аскалонского³⁾, получил ещё более точное значение π .

Затем идёт ряд индусских значений числа π . Самый ранний известный нам индусский математик Aryabhata (около 500 г. н. э.) дал значение

$$\pi = \frac{62832}{20000} = 3,1416.$$

В комментарии Siddhaseṇa Gaṇi (около 550 г. н. э.) находим:

«Диаметр равен ста тысячам уојаа; умножив это на сто тысяч уојаа, мы получаем квадрат; это ещё раз множится на десять и затем извлекается квадратный корень; этот корень и будет окружностью круга. Теперь при нахождении числа уојаа в корне мы получаем последовательно три, один, шесть, два и семь⁴⁾, т. е.

$$\pi = 1\sqrt{10} = 3,1627.$$

Brahmagupta (около 630 г. н. э.) брал для π значения $\pi = 3$, $\pi = \sqrt{10}$. Несколько ранее его Pūṣa (по свидетельству Аль-Бируни) брал $\pi = 3\frac{177}{12500}$. Тот же Брахмагупта утверждает, что Арьябхата брал

$$\pi = \frac{3393}{1080} = \frac{377 \times 9}{120 \times 9},$$

что воспроизводит птоломеевское значение $\pi = \frac{377}{120}$.

Недавно открытый Mahāvīraśūtra (середина IX в. брал для π значения 3 и $\sqrt{10}$.

³⁾ Tropfke, Geschichte der Elementar-Mathematik. - Enriques, Elementi d'Euclide e la critica antica e moderna, кн. XII, примечания, стр. 154.

⁴⁾ B. Datta, Early History of the principle of place value, Scientia, т. 50 (1931), стр. 1—12.

Наконец, последний индийский математик Bhaskara⁵⁾ (род. в 1114 г.) пользовался для π архимедовским значением $\frac{22}{7}$, а также и более точным

$$\pi = \frac{3927}{1250}.$$

Значения, выставленные средневековыми математиками, — типа архимедовских и поэтому неинтересны.

Новая история вычисления π начинается только с Вальты⁶⁾, который, пользуясь формулами для периметров 4-, 8-, 16-угольников и т. д., получает для π выражение в форме бесконечного произведения:

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2}} \times \\ \times \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2}} \dots$$

Большой шаг вперед в приемах вычисления π с помощью вписанных и описанных многоугольников делается Снеллием⁷⁾ в 1621 г. и Грегори⁸⁾ в 1667 г.

Первый даёт формулу

$$\underline{S}_{2n} = \sqrt{\underline{S}_n \cdot \bar{S}_n},$$

где $\underline{S}_n$ — площадь вписанного n -угольника, а $\bar{S}_n$ — описанного.

Второй поясняет эту формулу ещё следующей:

$$\frac{1}{\underline{S}_{2n}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\underline{S}_n} + \frac{1}{\bar{S}_n} \right).$$

Представления π Валисом в форме бесконечного произведения:

$$\pi = \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \dots$$

⁵⁾ D. E. Smith, The Geometry of the Hindus, Isis, т. I (1913), стр. 197—204. — См. также H. T. Colebrooke, Algebra with arithmetics and mensuration from the Sanskrit of Brahmagupta and Bhaskara, London, 1817.

⁶⁾ Vieta, Opera, ed. Schotus, 1646.

⁷⁾ Snellius, Cyclometria, 1621.

⁸⁾ Gregory, Vera circuli et hyperbolae quadratura. Padua, 1667.

и Брункером (Brounker) в форме непрерывной дроби:

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{9 + \frac{1}{25 + \frac{1}{2 + \frac{1}{49 + \frac{1}{2 + \frac{1}{81 + \frac{1}{2 + \dots}}}}}}}}$$

имеют только *теоретическое* значение, например, при установлении Лежандром иррациональности π .

Это ещё в большей мере следует сказать об очень медленно сходящемся ряде Лейбница

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

Современные методы вычисления π получили начало от Машинна (Mashin), который с помощью формулы

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}$$

представляет $\frac{\pi}{4}$ в форме

$$4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} = \operatorname{arctg} \frac{1}{359}$$

и даёт для $\frac{\pi}{4}$ уже хорошо сходящееся разложение

$$\frac{\pi}{4} = 4 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \dots \right) = \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3 \cdot 239^3} + \frac{1}{5 \cdot 239^5} - \dots \right).$$

Современные вычислители при определении π пользуются аналогичными приёмами.

4. Квадратура круга. История знаменитой проблемы о квадратуре круга, т. е. построении квадрата, равносильного кругу, обычно представляется как ряд тщетных попыток её решения, завершающихся сравнительно недавним доказательством *трансцендентности* числа π , разрешающим эту проблему. Но следует отметить, что те промежутки времени, в которые эта проблема привлекала к себе внимание, были сравнительно короткими.

В «Началах» Евклида классические проблемы на построение совсем не упоминаются.

В истории квадратуры круга наблюдается *неопределённость* в самой постановке проблемы и не только в начале (когда не были ещё точно установлены дозволенные инструменты и основные постулаты, которые, видимо, даются только «Началами» Евклида), но и позже. Тем не менее, следует думать, что в задаче

«найти квадрат, равновеликий данному кругу» смысл термина «найти» колебался около того, который определяет в качестве инструмента построения только *циркуль и линейку*, благодаря чему находимые в древности решения не всеми признавались таковыми и оставались под сомнением.

То, что в древности, и главным образом до Евклида, постановка проблемы о квадратуре круга являлась неопределенной, можно усмотреть хотя бы из того, что Аристотель⁹⁾ рассуждает о невозможности существования квадрата, равновеликого кругу, совершенно в духе своих метафизических рассуждений, совсем не рассматривая эту проблему так, как мы.

Монжюк¹⁰⁾ в своей истории квадратуры круга вынужден дать столь темное определение этой проблемы, что под него подойдет какая-нибудь проблема: «Квадрировать круг, — говорит он, — значит найти точно площадь, которую он занимает» («Quarrer le cercle c'est assigner l'étendue précise qu'il renferme»).

К числу эпох, в которые много занимались квадратурой круга, принадлежит XVI век. Но если глубже проанализировать решения того времени, то станет ясно, что они все относятся к задаче *приближенного* решения, причем авторы не вполне сознают, что ими решаются вовсе не те проблемы, над которыми ломали головы античные математики.

Здесь не место для подробного изложения истории квадратуры круга; по этому вопросу мы отсылаем читателя к специальным работам, например к уже упоминавшейся нами книге Ф. Рудно¹¹⁾. Здесь же мы обратим внимание только на *доказательство невозможности квадратуры круга* у различных авторов.

Все это — заблуждения, но весьма интересные. Анализируя их, можно видеть, как различно понимались эти проблемы в разные эпохи.

В XIV веке пробуждается некоторый интерес к математике, но ученые еще не могут рассуждать *математически*; всякая математическая проблема является еще *экзистенциальной*.

Альберт Саксонский¹²⁾ развивает мысли Орезма и Бравардина по образцу других схоластических проблем: *возможна ли квадратура круга?* При этом проблема понимается отнюдь не в смысле возможности построения квадрата с помощью циркуля и линейки, а чисто *онтологически*, в смысле возможности

⁹⁾ Аристотель, *Analytica priora*. — Его же, *Физика*, I, 2, пер. В. П. Карпова, М., 1936. — См. также Michand, *Aristote et mathématiques*, *Archiv f. Geschichte d. Philosophie*, 16 (1902), ст. 367.

¹⁰⁾ Montucla, *Histoire des recherches sur les quadratures*, Paris, 1754. 1831. — См. его же *Histoire des mathématiques*.

¹¹⁾ См. также Beutel, *Die Quadratur des Kreises* (Math. Phys. Bibliothek, Bd. 12, 1920).

¹²⁾ Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, Bd. II, стр. 144.

существования квадрата, равновеликого кругу, причём существование понимается не в евклидовом смысле, а в смысле бытия, независимого от всякого построения.

Первый аргумент возможности таков: для каждого круга существует описанный и вписанный квадрат — один с большей, другой с меньшей, чем круг, площадью. Если бы не было квадрата, равновеликого кругу, то был бы переход от большего к меньшему через все промежуточные значения, но без того, чтобы достигалась некоторая средняя величина.

Другой аргумент, который мы уже не будем развивать: квадратура круга возможна, потому что возможна кубатура; — на возможность же последней указывает опыт: передвигание воды из сферического сосуда в кубический.

Эти рассуждения не так неслепы и бесплодны, как кажется на первый взгляд. Всё это попытки овладеть *континуумом*, который только в конце XVIII века приводит к окончательной арифметизации, к взаимно однозначному соответствию между геометрическими величинами и числами. Это — первые попытки овладеть взаимно однозначным соответствием между величинами различных классов.

Что касается аргументов *против* квадратуры, разрушающих такое взаимно однозначное соответствие, то они обнаруживают не только无知, но и совсем превратные знания математиков средневековья. Так, например, фигуры с равными площадями почему-то представляются обязательно имеющими разные периметры, что, конечно, не имеет места для квадрата и круга. Затем, если половина круга равнялась бы половине квадрата, то фигура с прямоугольными углами равнялась бы фигуре без таких углов, что невозможно, потому что нельзя убедиться, видимо, в их равновеликости, и т. д.

Насколько неопределённой была постановка проблемы о квадратуре круга в XVI веке, особенно ясно видно из рассуждений Штиффеля.

Штифель¹³⁾ пытается доказать чисто *математически невозможность квадратуры круга*. Но в каком смысле?

Он аргументирует невозможность квадратуры круга тем, что *не существует числа, выражающего отношение окружности к диаметру*. Вместо слова «построение» у него употребляется «нахождение» и «указание».

Ясно, что для Штиффеля конечный результат квадратуры чисто *арифметический*; построения у него являются не целью, а скорее одним из средств, с помощью которых получается выражение площади круга числом. Когда он говорит, что квадратура круга превосходит разум вычислителя из смертных людей, то задачу о квадратуре круга он мыслит во всяком случае как вычислительную задачу.

¹³⁾ M. Stifel, *Arithmetica integra*, Нюрнберг, 1545.

Он пытается убедить читателя, что не существует числа, выражающего отношение окружности к диаметру, «выражаемого и невыражаемого», а так как под *выражаемым* разумеется здесь рациональное число, то, значит, Шигифель пытается доказать то, что много позже было доказано Лежандром. *Невыражаемое* число, тогда ещё не получившее всех прав гражданства, — это *немое число*, выражаемое в разностях.

5. Метод неделимых. Архимед, Кеплер, Кавальери. Кроме изложенного уже метода исчерпывания, которым Архимед пользовался, так сказать, при «спарадном», окончательном изложении доказательств выводимых предложений, у него был ещё механический метод, употреблявшийся им при «черновой» работе предварительного получения результатов, которые в дальнейшем доказывались уже совершенно строго при помощи метода исчерпывания. Изложение механического метода Архимед дал в найденном «Эфодиеке», но по существу он уже пользовался им в «Квадратуре параболы». Покажем идею этого метода на простеньком примере.

Пусть требуется определить площадь, заключённую между осью абсцисс, дугой параболы $y = ax^2$ и ординатой, соответствующей абсциссе $OA = l$ (черт. 7).

Представим себе равноплечий рычаг AOC длины $2l$ с точкой опоры в O ; на одной из его половин расположим интересующую нас площадь OAB и разобьём её на ряд весьма тонких полосок ширины Δx . Пусть KL будет одна из этих полосок, соответствующая абсциссе $OK = x$, тогда ордината KL будет ax^2 , и вся площадь полоски

$$\Delta S = ax^2 \cdot \Delta x.$$

Если мы сдвинем её на конц рычага A , то момент этой полоски относительно точки O будет:

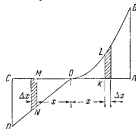
$$l \cdot ax^2 \cdot \Delta x.$$

Постараемся теперь уравновесить этот момент путём подвешивания полоски $MV \cdot \Delta x$ к левой стороне рычага на таком же расстоянии $OM = x$ от точки опоры O . Величину соответствующей ординаты MV определим, сравнивая моменты относительно O обеих полосок. Таким образом, будем иметь:

$$x \cdot MV \cdot \Delta x = l \cdot ax^2 \cdot \Delta x,$$

откуда

$$MV = alx.$$



Черт. 7.

Поступая так с каждой полоской, мы получим на левом плече рычага ряд полосок, непрерывно распределённых по длине CO . Так как ординаты полосок на левом плече рычага будут пропорциональны расстояниям x , то концы их расположатся на прямой линии OND ; величина последней ординаты CD будет al^2 .

После того как распределение полосок по левому плечу OC рычага будет закончено, мы получим, что вся интересующая нас площадь OAB , сосредоточенная на конце A , будет уравновешена треугольником OCD , прикрепленным к стороне OC . Площадь этого треугольника равна

$$\frac{1}{2} \cdot al^2,$$

расстояние его центра тяжести от вершины O будет $\frac{2}{3} OC =$

$= \frac{2}{3} l$; таким образом, сравнивая момент веса этого треугольника с моментом относительно O веса сосредоточенной в A искомой площади S , будем иметь:

$$\frac{2}{3} l \cdot \frac{1}{2} al^2 = Sl,$$

откуда находим величину S :

$$S = \frac{1}{3} al^2.$$

Но ордината AB , соответствующая абсциссе $OA = l$, будет al^2 ; таким образом,

$$S = \frac{1}{3} \cdot OA \cdot AB,$$

т. е. искомая площадь равна одной трети площади прямоугольника, построенного на абсциссе OA и конечной ординате AB .

Сочинения Архимеда получив на Западе широкое распространение во второй половине XVI века (первое печатное издание в Базеле в 1514 г.) и сразу подчинили себе передовых математиков того времени. Не будет большим преувеличением сказать, что Архимед был великим математиком конца XVI и первой половины XVII веков. Галилей, очень холодно относившийся к Архимеду, не называет Архимеда иначе как «divi viri Archimedes», и первое его сочинение было посвящено определению центра тяжести пирамиды — задаче, которая не была решена Архимедом. Кеплер под влиянием Архимеда писал свою «Стереометрию бочек», к которой присоединил своё «Supplementum Stereometriae Archimedeae», и занимался (во второй книге «Harmonices Mundi») исследованием тринадцати полуправильных архимедовых тел. Позднее продолжателем Архимеда был Гюйгенс,

из них будет равняться одному сектору круга; и они, имеющие основания на линии BC , все взятые вместе, т. е. состоящий из них треугольник BAC , будут равняться всем секторам круга, т. е. состоящей из всех этих секторов площади круга. Вот это и хочет установить архимедово приведение к неопости.

Итак, разделив BC пополам в H , построим параллелограмм $ABID$, и пусть DH пересечет AC в I . Этот прямоугольный параллелограмм будет равен площади круга. Действительно, как вся CB относится к своей половине CH , так и AB , то-есть DH , к половине IH . Значит, IH равняется ID , и HC равняется DA , то-есть HV и углы при I равны, а D и H прямые. Значит, треугольник ICH , находящийся вне параллелограмма, будет равен треугольнику IAD , на какой параллелограмм превосходит трапецию $AINH$.

Итак, если положим, что диаметр OB равен 7 частям, то квадрат диаметра будет 49. А так как подобных частей будет 22 в окружности, т. е. в BC , то её половина BH будет иметь их 11 (несколько меньше, как было сказано выше). Помножь 11 на полудиамер $3\frac{1}{2}$, т. е. на AB ; получится $38\frac{1}{2}$ — площадь прямоугольника AN .

Значит, каких частей квадрат диаметра имеет 49, таких площадь вписанного круга имеет $38\frac{1}{2}$:

дважды 98 77

Разделив на 7, получим 14 11

Что и требовалось доказать.

Интересно отметить, как отнеслись к доказательству Кеплера современники; так, состоявший в переписке с Кеплером Гульзеп (1577—1643) пишет (в «De centro gravitatis», Viennae, 1635): «Архимедово доказательство хочет заключить то же самое, но не теми средствами, какими пользуется Кеплер; это новый способ доказательства, хотя, сказать по правде, не совсем заслуживающий пренебрежения, но вместе с тем не архимедовский, не евклидовский».

Современников Кеплера пугало исчезновение различия форм в таких математических атомах, когда треугольник оказывается совпадающим с сектором или — с нашей современной точки зрения — когда криволинейная трапеция $abcd$ (черт. 9) отождествляется с прямолинейной трапецией $abcd$ или даже с внешним или внутренним прямоугольниками $abef$ и $aced$.

Продолжателем дела (если и не идей) Кеплера является ученик Галилея Кавальери (1598—1647), которому и принадлежит установление термина «неделимое» в выпущенной им в 1635 г. «Geometria indivisibilibus»¹⁵), хотя сам Кавальери защищается

¹⁵ Есть русский перевод С. Я. Лурье (ГТТИ, 1940).

против обвинения в том, что он заимствовал свои основные идеи у Кеплера. Уже упомянутый выше Гудден в своей книге «De septio gravitatio» писал:

Я просмотрел Геометрию Кавальери, известного геометра. В этих книгах я нашел, что автор получал толчок от Кеплера в свой метод неделимых не столько изобрёл, сколько из тем вышел на свет обществу... Эти кеплеровы складывшиеся в одну точку плоскости... показались Кавальери менее пригодными для дела; поэтому он пользуется линиями и параллельными плоскостями, которые являются неделимыми и в бесконечно большом количестве, и относительно их он заключает то, что требуется относительно конечных.

Из что Кавальери в книге «Exercitationes Geometricae sex» (Бонния, 1467) отмечает, что Гудден, повидимому, здесь обнаружил, что он не смог, как должно, прочесть книги вышеупомянутой Геометрии.

Если бы он рассмотрел их с подобающим вниманием, то он мог бы заметить, насколько различны основы обоих методов. Действительно, Кеплер из мельчайших точек каким-то образом составляет большие и пользуется этими телами как бы складывшимися в точку, тогда как я говорю только то, что плоскости являются как бы собраниями всех линий, равноотстоящих друг от друга, а тела как бы собраниями всех плоскостей, равным образом одинаково отстоящих друг от друга. А это, как всякий может видеть, сильно друг от друга отличается... У Кеплера я ничего не заимствовал, кроме немногих названий тел, о которых упоминается в этой геометрии (Н. В.).

Кавальери является основоположником метода неделимых, как метода актуально бесконечно малых. Но вместе с тем он употребляет все усилия, чтобы отмежеваться от Кеплера, чтобы избежать этого актуально бесконечно малого. Однако все его усилия оказываются тщетными, так как бесконечно малое остается у него в скрытой форме и при дальнейшем развитии должно вывиться как нечто *существующее до нуля*.

Ещё средневековые математики Р. Бекон и Бразавария отмечают неразрешимые парадоксы, к которым приводит составление линии из точек, поверхности из линий и тела из поверхностей.

Кавальери не объясняет своё неделимое актуально бесконечно малым, и мысль его всё время колеблется между разложением линии на точки, плоскости на линии и тела на плоскости, — причем линии и плоскости берутся параллельными парам касательных (регулам), — и *пкрытием* площади и тела сетками, помещением *каждо-то* между параллельными прямыми и плоскостями. При первом взгляде выступает дискретный характер континуума,



Черт. 9.

при втором — континуум остаётся чем-то сплошным, текущим. В иных случаях Кавальери выставляет оба подхода как две гипотезы, выбор из которых остаётся переишённым, и старается провести доказательство для каждой из этих гипотез.

При таком виде, когда совокупность прямых или плоскостей (т. е. все прямые или все плоскости) нельзя отождествить с площадью или объёмом, Кавальери вынужден говорить только об *отношениях* площадей и объёмов.

Площадь покрывается сеткой параллельных прямых, а объём — сеткой плоскостей; отношение площадей равняется отношению всех линий, а отношение объёмов — отношению всех плоскостей. Отсюда понятно, почему свой принцип, о котором ниже мы будем говорить подробнее, Кавальери выражает иначе, чем мы:

Если линии в двух площадях или плоскости в двух телах будут всегда в одном отношении, то в том же отношении будут в первом случае площади, во втором — объёмы.

Валлис¹⁶⁾ и другие математики XVII и XVIII веков оперируют уже *линиями* неделимыми. Валлис, правда, несколько робко отмечает, что правильнее называть элементы Кавальери не *линия-*

ми, а *параллелограммами* равной высоты, причём равной $\frac{1}{\infty}$, иначе говоря, бесконечно малой, но потом выражает явное предпочтение простой терминологии Кавальери. Валлис прибавляет, что это сводится к тому же, ибо если высота бесконечно мала, т. е. нуль (так как бесконечно малая величина уже не количество — по крайней мере, по Кавальери), то такой параллелограмм *есть* ли что-либо другое, чем линия. Различия только то, то линия эта «*расширяется*» и через умножение даёт определённую фигуру.

В отличие же от Кавальери Валлис оперирует не только отношением, но и равенством. Он, как Кеплер, мыслит конечные величины в виде сумм бесконечного числа актуально бесконечно малых элементов. Но эти элементы у него уже не отождествляются ни с параллелограммом, ни с линиями (хотя получают и первое, и второе название). Это уже нечто иное. Разделяя треугольник на элементы прямыми, параллельными основанию, он изменяет их потом входящими и выходящими параллелограммами α_j и β_j и замечает, что $\sum \alpha_j$ отличается от $\sum \beta_j$ на бесконечно малое, т. е. — прибавляет он — *на ничто* (бесконечно малое исчезает перед конечным).

Здесь усматривается уже определённое уклонение от основного принципа *слияния противоположностей* в бесконечно малом, но вместе с тем новый путь, отходящий от этого принципа, оказывается *необоснованным*, так как остаётся недоказанным, что $\sum \beta_j - \sum \alpha_j$ действительно бесконечно мало.

¹⁶⁾ Wallisius, Arithmetica infinitorum (Opera, vol. I, Оксфорд, 1647).

Вывод площади треугольника сводится к умножению высот таких входящих параллелограммов $\frac{1}{\infty} \cdot h$ (где h — высота данного треугольника) на сумму оснований:

$$\frac{a}{\infty} + \frac{2a}{\infty} + \dots + \frac{(\infty - 1)a}{\infty} = \frac{\infty}{2} a,$$

следовательно,

$$\frac{\infty}{2} a \cdot \frac{1}{\infty} h = \frac{ah}{2},$$

т. е. получаем известную формулу для площади треугольника.

Мы видим, что метод неделимых в своих основных принципах совершенно отличается от античного метода исчерпывания.

6. Ньютоново доказательство невозможности квадратуры круга. В XVII веке изыск о квадратуре круга значительно изменили свой характер. В связи с возникновением аналитической геометрии квадратуру круга стали рассматривать как проблему такой алгебраической функции от диаметра или, в общем случае, сегмента, от его хорды, которая позволяла бы вычислить площадь круга или дугу окружности, а также и соответствующие величины для сегмента. Но уже в XVII веке математикам пришлось убедиться, что даже в такой более широкой форме задача о квадратуре круга не может быть разрешена. В этом отношении очень интересно доказательство Ньютона. В 6-м разделе I книги «Principia» доказывается следующая лемма 28:

«Не существует оvalsной фигуры, площадь которой, отсекаемая произвольными прямыми линиями, могла бы быть в общем случае найдена при помощи уравнений с конечным числом членов и конечной степени».

Возьмём внутри овала какую-нибудь точку, вокруг которой, как центра, будет постоянно вращаться равномерным движением прямая линия, и пусть по этой прямой будет, исходя из центра, двигаться точка всё время со скоростью, пропорциональной квадрату заключённой в овале части этой прямой. При этом движении рассматриваемая точка опишет спираль с бесконечным числом завитков. Теперь, если бы часть овальной площади, отсекаемой этой прямой, могла быть определена при помощи конечного уравнения, то то же самое уравнение позволило бы найти и расстояние от центра движущейся точки, которое пропорционально этой площади, а следовательно, можно было бы определить конечным уравнением и все точки спирали; и вследствие этого для любого заданного положения прямой можно было бы при помощи конечного уравнения найти точки её пересечения со спиралью. Но всякая прямая, будучи бесконечно продолжена, пересекает спираль в бесконечном множестве точек, и уравнение, при помощи которого определяется какая-нибудь точка сечения двух линий, даст все точки их пересечения при помощи

такого же числа корней, а поэтому будет иметь степень, равную числу пересечений. Так как два круга пересекаются в двух точках, то одна точка пересечения может быть определена только при помощи уравнения двух измерений, которое определит также и другую точку пересечения. Так как у двух конечных сечений могут быть четыре точки пересечения, то ни одна из них вообще не может быть найденной иначе, чем из уравнения четырех измерений, которое одновременно определит и все остальные. Действительно, если бы мы отыскивали их пересечения в отдельности, то поскольку для всех их будет тот же самый закон и условия, в каждом случае будет тем же самым и вычисление, а значит, всегда один и тот же заключительный вывод, который должен охватывать сразу все точки пересечения и давать их, не делая различия между разными точками пересечения. Поэтому также и пересечения конечных сечений и кривых третьего порядка одновременно получаются из уравнения шести измерений, так как всего этих точек может быть шесть, а пересечения двух кривых третьего порядка, поскольку их может быть девять, получаются все сразу из уравнений девятого измерения. Если бы это не было необходимым, то все задачи третьей степени можно было бы приводить к плоским, а задачи степени высшей трех — к задачам третьей степени. Здесь я говорю о кривых, выражающихся неприводимым уравнением, степень которого не может быть понижена. Действительно, если бы определяющее данную кривую уравнение могло быть сведенным к низшей степени, то кривая не была бы единой, но состояла бы из двух или большего числа кривых, пересечения которых в отдельности могут быть найдены различными вычислениями. Тем же самым образом и парные точки пересечения прямых с конечными сечениями всегда получаются при помощи уравнений двух измерений, тройные точки пересечения прямых с неприводимыми кривыми третьего порядка — при помощи уравнений трех измерений, четверные же сечения прямых с неприводимыми кривыми четвертого порядка — при помощи уравнений четырех измерений и т. д. до бесконечности. Значит, бесконечное множество точек пересечения прямой и спирали, когда эта кривая является простой и не разлагается на несколько кривых, требует и уравнений с бесконечно большим числом измерений и корней, при помощи которых могут быть одновременно найдены все точки пересечения. Ведь у всех их будет один и тот же закон и одно и то же вычисление. Действительно, если мы на секущую прямую опустим из центра перпендикуляр и заставим его вращаться вокруг центра вместе с секущей, то точки пересечения спирали будут переходить друг в друга, и та, которая была первой или самой ближней, после одного поворота делается второй, после двух же — третьей и т. д., и уравнение будет одновременно меняться только вследствие изменения величины тех количеств, которыми определяется положение секущей. Поэтому, так как эти количества после отдельных обра-

щений возвращаются к первоначальным величинам, то и уравнение вернётся к первоначальной форме, а вследствие этого одно и то же уравнение даст все точки пересечения, и значит, будет иметь бесконечное множество корней, которыми могут быть определены все эти точки. Следовательно, пересечение прямой и спирали не может быть в общем случае определено при помощи конечного уравнения, а поэтому не может существовать никакой овальной кривой, площадь которой, отсечённая заранее заданными прямыми, могла бы быть вообще выражена при помощи такого же уравнения.

При помощи того же самого рассуждения, если расстояние между центром и описывающей спиралью точкой взять пропорциональным периметру отсечённой части овала, можно будет доказать, что длина периметра не может быть вообще выражена при помощи конечного уравнения. В данном случае я говорю об овалах, которые не имеют общих касательных с уходящими в бесконечность сопряжёнными кривыми.

Французские комментаторы Th. Le Senue и Fr. Jaquier¹⁷⁾ отмечают, что эти слова Ньютона исключают случай вроде изображённого на черт. 10, где овал $ABCD$ касается в C сопряжённой кривой, ветви Cd и Cb которой уходят в бесконечность. Для бесконечной части спирали рассуждения Ньютона стали бы неприложимыми, так как они потребовали бы, чтобы пропорциональная квадрату радиуса или длине дуги скорость обращалась в бесконечность. Из этого Ньютон делает следующий вывод:

«Следствие. Отсюда площадь эллипса, описываемого радиусом, соединяющим фокус с движущейся точкой, не может быть дана в зависимости от времени конечным уравнением, а вследствие этого и не может быть определена при помощи построения геометрически рациональных кривых. Геометрически же рациональными кривыми я называю такие, все точки которых могут быть определены при помощи длин, определённых уравнениями, то-есть при помощи комбинации отношений длин, остальные же (как, например, спирали, квадратриссы, трохонды) я называю геометрически иррациональными. Ибо (как говорится в десятой книге «Начал») длины, которые относятся или нег, как число к числу, будут арифметически рациональными или иррациональными. Таким образом, пропорциональную времени площадь эллипса и засекаю при помощи геометрически иррациональной кривой, как следует ниже» (*M. B.*).



Черт. 10.

¹⁷⁾ «Philosophiæ naturalis principia mathematica autore Is. Newtono», Genevæ, 1739, т. I, стр. 268.

7. Из истории теории пределов¹⁸⁾. В настоящее время вместо античного метода исчерпывания мы пользуемся методом пределов.

Понимание предела у Лейбница было связано с идеями метафизического характера¹⁹⁾. Основной принцип теории пределов — то, что *остается неизменным при всем изменении переменных $x, y, z, \dots$, отстоит первым и в пределе*. — у него выступает как метафизическое положение: *если данное известно образом упорядочен, то тот же порядок будет и в искомом*.

Это положение выводится им из чисто метафизического принципа непрерывности: *природа не делает скачков*, в силу которого всегда между двумя объектами A и B существует ещё объект C , промежуточный по своим свойствам.

Отсюда выводятся непрерывность всякого изменения, т. е. необходимость прохождения при каждом изменении объекта непрерывной совокупности форм, из которых смежные формы не различимы между собой.

Если измерение X должно закончиться формой A , то между X и A будет бесконечное множество промежуточных форм. Если при изменении X какое-либо его свойство остаётся неизменным, то оно найдётся и в A , ибо в противном случае в последний момент неизбежен скачок. Поэтому принцип непрерывности с этим необходимым его следствием Лейбниц принимает за принцип *общего порядка*, замечая, что он необходим и в геометрии и в физике. Из геометрии же Лейбниц заимствует и пример, поясняющий этот общий принцип: парабола — это искомое (по нашему — предел); если эллипс с бесконечно возрастающей осью есть данное, то и то, что присуще эллипсу — например, основные свойства фокуса и директрисы — остаётся и для параболы.

Эти лейбницянские идеи подвергаются у Ньютона²⁰⁾ математизации. Основная лемма его «метода первых и последних отношений» состоит в следующем:

«Величины и отношения величин, которые стремятся в данное время к равенству и с течением времени могут приблизиться друг к другу ближе, чем на какую-нибудь данную величину, становятся, наконец, равными».

Доказывается же эта лемма от противного. Если отвергнуть её, то разность рассматриваемых величин равна $D \neq 0$. Поэтому она не может сблизиться более чем на D , что противно условию.

¹⁸⁾ Д. Л. Мордухай-Болтовской, Генезис и история теории пределов [Известия Северо-Кавказского Гос. Университета, 1928, т. III (XV)].

¹⁹⁾ Leibnitz, Mathem. Schriften, Leipzig, 1850—1863. — Brunschwig, Les étapes de la philosophie mathématique, Paris, 1912.

²⁰⁾ I. Newton, Philosophiae naturalis principia mathematica (собр. русский перевод А. Н. Крылова), книга I, отдел 1.

Если вдуматься в рассуждения Лейбница и Ньютона, то выявится большая разница между их пониманием предела и нашим, идущим от Д'Аламбера²¹.

Д'Аламбер определяет предел следующим образом:

«Говорят, что одна величина является пределом другой величины, если эта вторая может стать к первой ближе, чем на любую данную величину, как бы она мала ни была, причём, однако, приближающаяся величина не может превзойти ту, к которой она приближается, и причём разность этой величины и её предела абсолютно не указуема».

Это определение, конечно, не вполне совпадает с современным.

Во-первых, оно вовсе не требует, чтобы предел был *постоянной* величиной.

Если мы имеем две переменные величины X и Y , и X «догоняет» Y , никогда её не достигая, то согласно определению Д'Аламбера Y будет пределом для X .

Во-вторых, речь идёт только о переменной X , остающемся *меньше* своего предела A (хотя такое же определение тотчас устанавливается и для случая, когда X *больше* A) и, таким образом, это определение вовсе не обнимает случая предела непрерывной дроби, последовательные приближения которой бывают то меньше, то больше своего предела.

Чтобы понять сделанное Д'Аламбером добавление: «...чтобы разность этой величины и предела была бы абсолютно не указуема», предположим, что переменная принимает значения:

$$X_1, X'_1, X_2, X'_2, X_3, X'_3, \dots,$$

где разность $(A - X_n)$ с возрастанием n бесконечно убывает, но к $(A - X'_n)$ то же не относится. Тогда A уже не будет *пределом* X_n .

На *современном* языке условие «вторая может приближаться к первой ближе, чем на любую заданную величину, как бы мала она ни была» выразится так: сколь бы мала ни была положительная величина ε , можно найти n такое, что при $n > n$ будет

$$|A - X_n| < \varepsilon.$$

Различие значений переменного и предела резко подчёркивается Д'Аламбером. «Предел, — говорит Д'Аламбер, — никогда не совпадает или не становится равным величине, для которой он является пределом, но она приближается к нему всё более и более и может различаться от него как угодно мало.

Д'Аламбер не мог написать $11 \div 3 = 3$.

²¹ D'Alembert, *Limite*, статья в знаменитой «Энциклопедии», т. II.

Кроме того, понятие предела у Д'Аламбера ещё не *арифметизировано*.

Примеры, приводимые Д'Аламбером, указывают, что у него речь идёт не только о *величине*, но и о *форме* (как у Л. Бертрана²³):

«Круг, например, есть предел вписанных и описанных многоугольников, так как он никогда точно с ними не совпадает, но может бесконечно сближаться».

Наш академик С. Гурьев заменяет даламберовское определение следующим:

«Если какая-нибудь величина от какого-ни есть известного без конца продолжаться могущего действия всегда возрастает или убывает и от того к другой неперменной (*постоянной*) величине приближается, так что может разниться с нею меньше, нежели всякая по произволению данная или взятая того же рода величина, и со всем тем её никогда не достигает, то сия другая неперменная величина есть то, что пределом первой (возрастающей или убывающей величины) мы называем»²⁴.

Гурьев, как мы видим, подчёркивает, что предел есть обязательно *постоянная*.

Д'Аламбер и за ним более тщательно Де ля Шапель²⁵ основывают теорию пределов на двух положениях:

1) если две величины суть пределы одной и той же, то эти величины равны;

2) пусть $A \cdot B$ произведение двух величин A и B . Если C есть предел A и D — предел B , то произведение пределов C и D есть necessarily предел $A \cdot B$.

Первая лемма, играющая ту же роль, что лемма Ньютона, у последующих авторов (и в наших учебниках) заменяется такой: *если две переменные величины при самом изменении остаются равными, то равны и их пределы*.

Предложение (являющееся в современном элементарном изложении теории пределов *второй леммой*) о том, что если всегда $X = \frac{m}{Y}$, то $\lim X = \frac{m}{\lim Y}$, родится позже, в теории пределов Люилье²⁶, который оперирует только с *пределами отношений*.

Впервые элементарная теория пределов, хотя и не совсем в современном виде, вносится в учебник геометрии Лакруа.

Отметим, что изложение Гурьева отличается от изложения Д'Аламбера.

²³) Bertrand, Développement nouveau de la partie élémentaire des Mathématiques, 1778.

²⁴) С. Е. Гурьев, Опыт об усовершенствовании элементов геометрии, СПб, 1798.

²⁵) De la Chapelle, Institutions de géométrie, Paris, 1762.

²⁶) L'Huilier, Principiorum calculi differentialis et integralis expositio elementaris, 1786.

Из своего определения предела, как постоянного, Гурьев выводит следующее заключение:

Если имеются два переменных X и Y , возрастающие или убывающие так, что $X < A < Y$, и разность между X и Y может быть сделана меньше всякой данной величины, то A есть предел X и предел Y . Если же это имеет место и для B , $X < B < Y$, то отсюда выводится (на основании однозначности предела, постулируемого первой леммой Д'Аламбера), что $A = B$.

Легко видеть, какое применение находит лемма Гурьева в выводе теоремы Архимеда о равновеликости круга и треугольника, высота которого равна радиусу, а основание — окружности.

8. Арифметизация метода исчерпывания. Поскольку учебник Лежандра «*Éléments de géométrie*» послужил образцом для очень большого количества геометрических учебников XIX века (в том числе и для нашего учебника Киселева), то представляет интерес познакомиться со способом изложения у Лежандра определения площади круга.

Лежандр в своем изложении совсем не пользуется методом пределов, уже вошедшим в науку того времени. Он идет по пути античного метода исчерпывания, но существует глубокое различие между Лежандром, с одной стороны, и Евклидом и Архимедом, с другой. Лежандр арифметизирует геометрию: каждая геометрическая величина у него — будь то длина, площадь или объем — определяется некоторым рациональным или иррациональным числом и, обратно, каждое число может быть представлено в виде любой геометрической величины.

Определению длины окружности посвящена четвертая книга его геометрии³⁹. Разобрав в первых восьми предложениях свойства правильных многоугольников, он устанавливает две леммы:

«Всякая кривая линия или многоугольник, которые обнимают с одного конца до другого выпуклую линию AMB , будут больше обнимаемой линии AMB (предложение 3...).

«Если даны две концентрические окружности, то в большую всегда можно вписать правильный многоугольник, стороны которого не встречаются с меньшей окружностью, а также около меньшей окружности можно описать правильный многоугольник, стороны которого не встречаются с большей; таким образом, в обоих случаях стороны построенного многоугольника будут заключаться между обними окружностями (предложение 10».

После этого в предложениях 11 и 12 излагается интересующая нас теория.

Предложение II.

Теорема. Окружности круг и будут относиться между собой, как радиусы, а их площади, как квадраты радиусов.

³⁹ Мы пользовались II-м изданием «*Éléments de géométrie*», Paris, Didot, 1817.

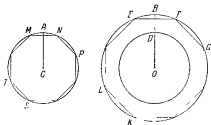
Обозначим для сокращения через *окр. CA* окружность, имеющую радиусом *CA*; я утверждаю, что будет:

$$\text{окр. } CA : \text{окр. } OB = CA : OB$$

Действительно, если эта пропорция не имеет места, то *CA* будет к *OB*, как *окр. CA* к четвертому члену, который будет больше или меньше *окр. OB*; предположим сначала, что он будет меньше, и пусть, если возможно, имеет место пропорция

$$CA : OB = \text{окр. } CA : \text{окр. } OD.$$

В окружность с радиусом *OB* впишем правильный многоугольник *EFGKLE* так, чтобы его стороны не встречали окружности с радиусом *OD*; подобный же многоугольник *MNPSTM* впишем в окружность с радиусом *CA* (черт. 1).



Черт. 1.

Теперь вследствие подобия этих многоугольников их периметры *MNPSTM*, *EFGKLE* будут относиться между собой, как радиусы *CA*, *OB* описанных кругов, и мы получаем:

$$MNPSTM : EFGKLE = CA : OB,$$

но, согласно предположению,

$$CA : OB = \text{окр. } CA : \text{окр. } OD,$$

значит,

$$MNPSTM : EFGKLE = \text{окр. } CA : \text{окр. } OD.$$

Но эта пропорция невозможна, ибо контур *MNPSTM* меньше *окр. CA* и, наоборот, *EFGKLE* больше, чем *окр. OD*; значит, невозможно, чтобы *CA* была к *OB*, как *окр. CA* к окружности, меньшей *окр. OB*, или вообще невозможно, чтобы радиус был к радиусу, как окружность, описанная первым радиусом, к окружности, меньшей, чем та, которая описана вторым радиусом.

Отсюда я заключаю, что не может быть также, чтобы *CA* была к *OB*, как *окр. CA* к окружности, большей, чем *окр. OB*;

ибо, если бы это было так, то мы получили бы, обратив отношения, что OB будет к CA как окружность, большая окр. OB к окр. CA , или, что то же, как окр. OB к окружности, меньшей окр. CA , значит, радиус был бы к радиусу, как окружность, описанная первым радиусом к окружности, меньшей, чем окружность, описанная вторым радиусом, что не только что доказанному невозможно.

Поскольку четвертый член пропорции

$$CA:OB = \text{окр. } CA:X$$

не может быть ни меньше, ни больше окр. OB , то нужно, чтобы он был равен окр. OB ; итак, окружности кругов будут относиться между собою, как радиусы.

Совершенно подобные рассуждения и построения позволяют доказать, что площади кругов будут относиться, как квадраты их радиусов.

«Предложение 12

Теорема. *Площадь круга равна произведению его окружности на половину радиуса.*

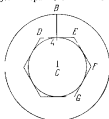
Обозначим через пл. CA площадь круга с радиусом CA ; я утверждаю, что будет

$$\text{пл. } CA = \frac{1}{2} CA \times \text{окр. } CA$$

Действительно, если $\frac{1}{2} CA \times \text{окр. } CA$ не будет площадью круга с радиусом CA , то это количество будет мерой большего или меньшего круга. Предположим сначала, что оно будет мерой большего круга, и пусть, если возможно,

$$\frac{1}{2} CA \times \text{окр. } CA = \text{пл. } CB.$$

Около круга радиуса CA опишем правильный многоугольник $DEFG$, стороны которого не встречаются бы окружности с радиусом CB (черт. 12); площадь этого многоугольника будет равна его контуру $DE + EF + FG +$ и т. д., умноженному на $\frac{1}{2} AC$; но



Черт. 12.

контур многоугольника больше вписанной окружности, поскольку он ее обнимает со всех сторон; значит, площадь многоугольника $DEFG$ будет больше, чем $\frac{1}{2} AC \times \text{окр. } AC$, что по предположению является мерой круга с радиусом CB ; значит, многоуголь-

ник оказался бы более круга. Но он, наоборот, меньше, поскольку он в нём содержится; значит, невозможно, чтобы $\frac{1}{2} CA \times \text{окр.} CA$ было бы больше, чем пл. CA , или, иными словами, невозможно, чтобы окружность круга, умноженная на половину своего радиуса, была бы мерой большего круга.

Во-вторых, я утверждаю, что то же самое произведение не может быть мерой меньшего круга; и чтобы не менять фигуры, я предположу, что дело идёт о круге с радиусом CB ; нужно, следовательно, доказать, что $\frac{1}{2} CB \times \text{окр.} CB$ не может быть мерой меньшего круга, например, круга с радиусом CA . Действительно, пусть будет, если возможно,

$$\frac{1}{2} CB \times \text{окр.} CB = \text{пл.} CA.$$

Если мы сделаем то же самое построение, что и выше, то площадь многоугольника $DEFG\dots$ будет иметь мерой $(DE + EF + \dots + FG + \dots) \times \frac{1}{2} CA$; но контур $DE + EF + FG + \dots$ и т. д. меньше окр. CB , обнимающей его со всех сторон; значит, площадь многоугольника будет меньше $\frac{1}{2} CA \times \text{окр.} CB$ и тем более меньше, чем $\frac{1}{2} CB \times \text{окр.} CB$. Эта последняя величина будет согласно предложению мерой круга радиуса CA ; значит, многоугольник будет меньше, чем вписанный круг, что нелепо; значит, невозможно, чтобы окружность круга, умноженная на половину своего радиуса, была мерой меньшего круга.

Итак, наконец, окружность круга, умноженная на половину своего радиуса, будет мерой этого самого круга.

9. Схема интегрального исчисления. Рассуждения как Кеплера, так и Кавальери мы в настоящее время перерабатываем, заменяя актуальное бесконечно малое потенциальным. Прежде всего устанавливается понятие *эквивалента*. Две бесконечно малых α и β называются *эквивалентными*, если отличаются на бесконечно малую высшего порядка, т. е. если $\beta = \alpha + \gamma$, где $\frac{\gamma}{\alpha}$ есть бесконечно малая ε , так что

$$\beta = \alpha + \alpha\varepsilon = \alpha(1 + \varepsilon).$$

Отсюда следует, что эквивалентные бесконечно малые можно определять, как такие, предел отношения которых равен единице, т. е. $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$. Если α и β эквивалентны, то мы будем писать $\beta \approx \alpha$.

Важное значение в исчислении бесконечно малых имеет *основная лемма интегрального исчисления*: не изменяя предела сумм, можно (при известных условиях) заменять бесконечно малые элементы их эквивалентами:

$$\text{если } \beta_i = \alpha_i, \text{ то } \lim \sum \beta_i = \lim \sum \alpha_i.$$

Доказательство этой леммы имеется в любом Введении в Анализ. Она ещё не даёт *интегрального исчисления*, — не предполагает его *техники*, — но фиксирует его *основную идею*.

Основная же идея *исчисления бесконечно малых* состоит в том, что для определения какой-либо величины A она:

1) разбивается на бесконечно малые элементы α_i , так, что $A = \lim \sum \alpha_i$; ланк $\lim$ ставится здесь, чтобы показать, что элемент не зафиксирован. Мы здесь ищем переход от одной системы бесконечно малых $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n, \dots$ к другим

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha_1^{(1)}, & \alpha_2^{(1)}, & \alpha_3^{(1)}, & \dots, & \alpha_n^{(1)}, & \dots, \\ \alpha_1^{(2)}, & \alpha_2^{(2)}, & \alpha_3^{(2)}, & \dots, & \alpha_n^{(2)}, & \dots, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

так, что число бесконечно малых возрастает, а наибольшая из них убывает; затем подыскиваются к α_i эквиваленты β_j .

Этот метод отвечает *дифференциальному исчислению*. Истинно дифференциалы являются наиболее подходящими эквивалентами. Мы знаем, что дифференциал функции — эквивалент её приращения.

2) Суммируется не сумма $\sum \alpha_i$, а сумма эквивалентов $\sum \beta_j$, т. е. берется $\lim \sum \beta_j$. Этот второй момент отвечает *интегральному исчислению*.

Чтобы найти длину дуги, мы делим ее на части и заменяем их хордами и затем ищем предел суммы длин этих хорд.

Под эту схему подводится и изреченное рассуждение Кеплера. Круг делится на секторы; берутся их эквиваленты (что, конечно, следует доказать) — треугольники с основаниями, равными дугам, и с высотой, равной радиусу, и откладываются так, как это указывается в рассуждении Кеплера.

Обычный вывод площади круга тоже укладывается в эту схему. Здесь эквивалентом сектора является вписанный в него треугольник.

10. Другая форма доказательства четвертого предложения. В «Приложении» к гейберговскому изданию Евклида находится следующий вариант доказательства четвертого предложения со слов «Как же упомянутые призмы друг к другу ...» и до самого конца доказательства.

«И поскольку в пирамиде $ABCH$ две призмы равны друг другу, а также и в пирамиде $DEIG$ две призмы равны друг дру-

гу, то, значит, будет, что как призма, основание которой параллелограмм $BK LX$, противоположное же — прямая MO , к призме, основание которой треугольник LXC , противоположное же OMN , так и призма, основание которой $PERF$, противоположное же <прямая> ST к призме, основание которой треугольник RFI , противоположное же STU . «Присоединяя», значит, будет, что как призма $KBXLMO$, $LXCMNO$ к призме $LXCMNO$, так и призма $PEFRST$, $RFISTU$ к призме $RFISTU$. «Перестановка», значит, будет, что как призма $KBXLMO$, $LXCMNO$ к $PEFRST$, $RFISTU$, так и призма $LXCMNO$ к призме $RFISTU$. Как же призма $LXCMNO$ к призме $RFISTU$, так по доказанному и основание LXC к RFI , и основание ABC к основанию DEI . И значит, как треугольник ABC к треугольнику DEI , так и две призмы в пирамиде $ABCH$ к двум призмам в пирамиде $DEIG$. Точно так же, если мы и оставшиеся пирамиды $MNOH$, $STUG$ разделим тем же самым образом, то будет, что как основание MNO к основанию STU , так и две призмы в пирамиде $MNOH$ к двум призмам в пирамиде $STUG$. Но как основание MNO к основанию STU , так и основание ABC к основанию DEI . И значит, как основание ABC к основанию DEI , так и две призмы в пирамиде $ABCH$ к двум призмам в пирамиде $DEIG$, и две призмы в $MNOH$ к двум призмам в пирамиде $STUG$, и, <наоборот>, все четыре ко всем четырём. То же самое мы докажем и относительно тех призм, которые получаются от деления пирамид $AKLO$ и $DPRS$, и вообще всех <взятых> в равном количестве <призм>; что и требовалось доказать.

11. Исторические сведения о вычислении объема пирамиды. Интересно, что формулы для определения объема усеченной пирамиды были даны раньше, чем для определения объема полной пирамиды.

Самое раннее свидетельство об этом мы имеем в знаменитой 14-й задаче Московского папируса (начало второго тысячелетия до н. э.), которая читается так (черт. 13):

«Глава 7) действия с „усеченной пирамидой“ * *)

Как скажут тебе: „усеченная пирамида“ в 6 в „площади“ (štīw) по 4 в нижней, по 2 в верхней;

Действуй ты: сделай 4 эти в „восхождении“ **), получается теперь 16.

Действуй ты: удвой 4; получается теперь 8.

Действуй ты: сделай 2 эти в „восхождении“; получается теперь 4.

Действуй ты: сложи ты эти 16 вместе с этими 8, вместе с этими 4; получается теперь 28.

*) то иногда переводится как «пример, образец».

**) В подлиннике здесь и ниже обозначена значком Δ .

***) В подлиннике знак идущих ног Δ ; по смыслу — «возводи в квадрата».

Действуй ты: сделай ты $\frac{1}{3}$ от 6; получается теперь 2.

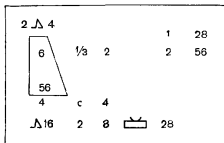
Действуй ты: делай ты 28 раза 2; получается теперь 56. Смотри: она в 56.

Напел ты хорошо. ⁴⁾

Вычисление в точности следует формуле

$$V = \frac{h}{3} (a^2 + ab + b^2),$$

где h — высота (*štiw*) усеченной пирамиды, a и b — стороны верхнего и нижнего оснований



Черт. 13.

Чтобы понять, каким образом египтяне пришли к этой формуле, а также выяснить, понимали ли они ее общность, надо несколько заняться терминологией задачи.

Прежде всего в высшей степени вероятно, что мы имеем дело с усеченной пирамидой, две боковые грани которой отвесны, а верхнее и нижнее основания представляют квадраты со сторонами соответственно 2 и 4. Мы получили бы эту фигуру, если бы правильную квадратную усеченную пирамиду разрезали на четыре равные части плоскостями, перпендикулярными к основаниям и параллельными их сторонам. Кроме этого, в задании имеется еще одна величина, равная 6 и обозначенная термином *štiw*. В 6-й задаче Московского папируса (сокращенно М6) термином *šti* или *štu*, вне всякого сомнения, обозначалась площадь прямоугольника; в М18, где речь идет о вычислении количества ткани для платья, мы встречаем в точности тот же термин *štiw*, первая часть которого (*šti*) обозначается детермина-

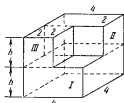
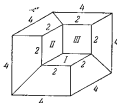
⁴⁾ Отметка учителя.

тивом шкуры, произведённой стрелой; но всей вероятности (текст задачи сильно испорчен) и здесь нужно понимать *štiw* как площадь. Затем, соответствующее *štiw* число 6 поставлено *внутри* трапеции на чертеже, а это по египетской математической орфографии обозначает, что мы имеем дело не с длиной, но с площадью или объёмом, содержащимися внутри изображаемого контура.



Черт. 14.

Будем считать $\text{štiw} = 6$ площадью *вертикальных* граней пирамиды; тогда нетрудно видеть, что если верхнее и нижнее основания получившейся трапеции равны 2 и 4, то высота должна быть равна 2. Трапеция будет иметь вид, как на черт. 14, причём острый угол при нижнем основании будет равен 45° . Соответствующая усечённая пирамида обладает тем свойством, что объём её можно определить совершенно элементарно: достаточно будет взять три



Черт. 15.

таких пирамиды и сложить их вместе, как показано слева на черт. 15. На правом же чертеже здесь показано, как получившаяся фигура разбивается на три призмы с объёмами:

$$V_1 = 4^2 \times h, \quad V_2 = 2 \times 4 \times h, \quad V_3 = 2^2 \times h.$$

Таким образом, объём рассматриваемой усечённой пирамиды получается по формуле

$$V = \frac{h}{3} (4^2 + 2 \cdot 4 + 2^2),$$

где h обозначает *высоту* пирамиды, которая в данном случае будет равна 2. Стоящую в скобках сумму египтянин действительно определял на чертеже внизу: она равна 28. Таким образом, искомый объём будет:

$$V = \frac{2 \cdot 28}{3} = \frac{56}{3}.$$

Если бы 56 делилась на три, то египтянин исполнил бы это деление, и тогда никаких вопросов больше и не возникло бы. Но,

и сожалению, 56 на 3 не делится, а древние математики, вероятно, так же не любили дробных ответов, как и современные авторы задачников по арифметике. Тогда невольно напрашивается предположение, что автор задачи при формулировке ее условий предпочел увеличить втрое высоту заданной пирамиды, сравнительно предполагая, хотя и не умея этого доказать, что от этого объема пирамиды должен тоже утроиться. Таким образом, высота заданной пирамиды сделалась равной $\frac{1}{3}$ боковой грани исходной пирамиды с двугранным углом при основании, равным 45° .

Конечно, нельзя ручаться, что данное объяснение вполне соответствует действительности, но во всяком случае сама возможность такого объяснения показывает, что мы не должны принимать за абсолютно достоверный факт, что египтяне *знали* общую формулу объема усеченной пирамиды, не говоря уже о том, что они *умели* ее доказывать.

Несколько моложе египетских вавилонские математические тексты, которые можно отнести приблизительно к середине второго тысячелетия. В них так же, как и в египетских, совершенно нет примеров на вычисление объема полной пирамиды, но зато объем усеченной пирамиды вычисляется по одной раз, причём последняя рассматривается как своего рода частный случай призмы. В этом отношении характерен текст № 4703 библиотеки Итальянского университета²⁷). Из 60 задач этого текста первые 52 касаются объемов прямоугольных параллелепипедов, а последние 8 — усеченных пирамид с квадратным основанием; таким образом, усеченные пирамиды рассматриваются как видоизмененные соответствующего параллелепипеда, и объемы их вычисляются по такой же формуле; только вместо площади основания берется средняя арифметическая из площадей обоих оснований.

Однако в одном случае вавилонский математик дал совершенно точную формулу для определения объема усеченной пирамиды. В тексте № 85194 Британского музея (Neugebauer, I, 142—193) 28-я задача читается следующим образом:

«Руб. По 10 голова, 18 высота, на 1 локоть 1 уклон. Основание и земляные массы* (объем) что?»

Дело идет о яме в виде квадратной усеченной пирамиды, наклон боковых граней которой равен 45° (на 1 локоть 1 уклон). Правильно определив сторону нижнего основания в 7, вавилонянин переходит к определению объема:

«Снова основание и голову 10 сложи: 17 видишь.

1
2 от 17 отломай: 8; 30 видишь.

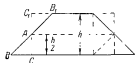
Введи в квадрат: 1, 12; 15 видишь.

1, 12; 15 положи.

²⁷) Neugebauer, Mathematische Keilschrifttexte, т. I, Берлин, 1937, стр. 389—402.

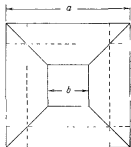
2-ю часть от 3 разности, чем голова над основанием возвышается, возводи в квадрат...

Дальше в уничтоженном листе с этим квадратом производилась какая-то операция; какая именно — нетрудно угадать, так как мы знаем ее результат 0,45 (три четверти).



$$\left(\frac{10+7}{2}\right)^2 \cdot x = \frac{9}{4} \cdot x \quad 0,45.$$

Нетрудно видеть, что $x = \frac{1}{3}$.



Черт. 16.

0,45 к 1,12; 15 прибавь 1,13 видишь.

18 на 1,13 помножь: 22,30 видишь.

Таким образом, объем вычислен по формуле:

$$18 \left\{ \left(\frac{10+7}{2} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{10-7}{2} \right)^2 \right\} = 22,30,$$

что соответствует

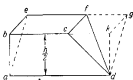
$$V = h \left\{ \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{a-b}{2} \right)^2 \right\}$$

Впервые совершенно правильную реконструкцию вывода этой формулы дал советский историк С. Я. Лурье²⁸⁾.

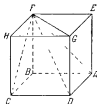
По середине боковых ребер пирамиды делаем четыре вертикальных надреза (черт. 16), которые отдают по углам четыре пирамиды с высотой $\frac{h}{2}$ и с квадратными основаниями со стороной $\frac{a-b}{4}$, а по бокам четыре треугольные призмы с горизонтальным ребром $\frac{a+b}{2}$ и с основаниями в виде треугольника ABC со сторонами $AC = \frac{h}{2}$ и $BC = \frac{a-b}{4}$. Эти призмы мы заворачиваем вверх в положение AB_1C_1 . Для того чтобы это

²⁸⁾ К вопросу о египетском влиянии на греческую геометрию (Архив истории науки и техники, т. I, 1, 1933, стр. 55).

было возможно сделать для всех четырёх призм, нужно у двух из них, расположенных пирамины друг друга, обрезать по бокам по две пирамидки $defgk$ с высотой $kd = \frac{h}{2}$ и с квадратным основанием $efgk$, сторона которого будет $\frac{a-b}{4}$ (черт. 17). После этого объём усечённой пирамиды будет равен объёму центральной четырёхугольной призмы с основанием в виде квадрата, сторона которого $\frac{a+b}{2}$, и с высотой h , и, кроме того, восьми пирамид с высотой $\frac{h}{2}$ и квадратными основаниями со сторо-



Черт. 17.



Черт. 18.

ной $\frac{a-b}{4}$. Так как наклон двух боковых граней каждой такой пирамиды равен 45° , то её объём легко может быть найден из следующих соображений.

Возьмём куб $ABCDEFGH$ со стороной $\frac{a-b}{4}$ (черт. 18). Его вертикальные стороны будут соответствовать нашей высоте $\frac{h}{2}$, которая вследствие 45° -градусного наклона граней будет тоже равна $\frac{a-b}{4}$. Этот куб можно разбить на три пирамиды

$$FABCD, FCDGH, FADEG,$$

которые как раз и будут представлять интересующие нас пирамиды, объём каждой из которых равен

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{h}{2} \cdot \left(\frac{a-b}{4} \right)^2.$$

Для восьми пирамид это даст нам

$$\frac{8}{3} \cdot \frac{h}{2} \cdot \left(\frac{a-b}{4} \right)^2 = \frac{1}{3} h \left(\frac{a-b}{2} \right)^2.$$

Эт. будет тот добавочный член, который нужно придать к объему центральной призмы $h \left(\frac{a+b}{2} \right)^2$, чтобы получить объем всей рассматриваемой пирамиды.

То, что вавилоняне получали эту формулу лишь для частного случая, можно видеть из того, что во всех остальных случаях при произвольном угле наклона граней объем пирамиды всегда вычислялся по неверной формуле

$$V = h \cdot \frac{S_{верх} + S_{нижн}}{2}.$$

Однако пирамида с наклонами двух граней по 45° помогла вавилонянам решить еще одну интересную задачу: «определить сумму квадратов чисел натурального ряда. Решение этой задачи имеется в значительно более позднем тексте эпохи Селевкидов (примерно II век до н. э.), а именно в тексте № 6484 Луврского музея (Neugebauer, I, 96—107). Вторая задача этого текста читается так:

«Квадраты от единицы 1 до 10 раз, т. е. 1,40. Установи их сумму».

1 на 0;20 $\left(\text{т. е. } \frac{1}{3} \right)$ помножь: 0;20.

10 на 0;40 — две трети — помножь: 6;40.

6;40 и 0;20 зает 7.

7 на 55 помножь: 6,25.

6,25 суммз.

Вычисление следует формуле $\left(\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot 10 \right) \cdot 55$. Так как

$$35 = 1 + 2 + 3 + \dots + 10 = \sum_{n=1}^{10} n,$$

то мы имеем:

$$\sum_{n=1}^{10} n^2 = \left(\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot 10 \right) \cdot \sum_{n=1}^{10} n.$$

С. Я. Лурье в примечаниях к русскому переводу «Лекций» Нейгебауера²⁹⁾ дал красивый геометрический вывод этой формулы, который иллюстрируется нашим черт. 19. Он основан на том, что куб можно разбить на три равных пирамиды с квадратными

²⁹⁾ О. Нейгебауер, Лекция по истории античных математических наук, т. I, перевод С. Я. Лурье, М.—Л., 1937, стр. 192—194.

основаниями и общей вершиной. Вавилонская формула, которую можно переписать в виде²⁾

$$\sum n^2 = \frac{1}{3} (1 + 2n) \sum n,$$

легко может быть интерпретирована на чертеже. Мы видим, как три четырёхгранные ступенчатые пирамиды I, II, III, представляющие каждая $\sum n^2$ (в нашем случае $n=4$), распадутся на две трёхгранные ступенчатые пирамиды, основание каждой из которых равно $\sum n$, а высота у одной n , а у другой $n+1$.

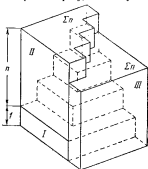
Это последнее свидетельство непосредственно приводит нас к великому греческому материалисту Демокриту, жившему несколько ранее времени составления вавилонского документа. Если до Демокрита объём пирамиды был найден лишь в частном случае четырёхугольной пирамиды с двумя боковыми гранями, наклонёнными под углом 45° к горизонту, то Демокриту принадлежит честь обобщения рассматриваемой формулы на случай любой пирамиды, и притом не только пирамиды, но и конуса^{2b)}. В новонайденном «Эпидикте» Архимед говорит:

«Евдокс первый нашёл доказательство относительно конуса и пирамиды, а именно, что конус есть третья часть цилиндра, а пирамида — третья часть призм, имеющих то же самое основание и одинаковую высоту, однако немалую часть в этом надлежит и Демокриту, первому высказавшему без доказательства это предложение относительно указанного тела».

«Без доказательства» у Архимеда следует понимать в смысле «без строгого доказательства». Как именно Демокрит доказывал выставленное положение, можно судить по сохранившемуся у Плутарха (H. Dieks, *Die Fragmente der Vorsokratiker*, Bd. II, стр. 90, Fragm. 155) замечанию:

«Затем смотри, каким образом [Хрисипп] возразил Демокриту, ставившему на основании логических и физических соображений такой вопрос: если разсекать конус плоскостями, параллельной о и или ρ , то как надо представлять себе поверхности сечений — равными или неравными? ибо, будучи неравными, они сделают

^{2b)} С. Я. Лурье, *Теория бесконечно малых у древних атомистов*, М.—Л., 1935, стр. 67 и след.



Черт. 19.

конус негладким, вследствие того, что он получит множество ступенчатых углублений и выступов, если же они будут равны, то будут равными и сечения, и конус представится в виде цилиндра, так как будет составлен из равных, а не неравных кружков, что является нелепым».

Самое простое объяснение этого текста заключается в том, что Демокрит представлял конус или пирамиду сложенными по типу неделимых Кавальери из бесконечно тонких кружков или подобных друг другу пластинок. То обстоятельство, что Демокрит рассматривал одновременно и конус и пирамиду, позволяет думать, что он считал два тела равновеликими, если они могут быть составлены из соответственно равных друг другу «неделимых»; если же эти «неделимые» обоих тел будут находиться друг к другу в соответственно равных отношениях, то такое же соотношение будет существовать и между объемами обоих тел. На последнюю возможность указывает несколько необычная для нас формулировка 5-го предложения XII книги Евклида: «пирамиды, находящиеся под одной высотой... будут относиться, как основания». Тогда метод Демокрита позволит найти объемы любой пирамиды или конуса, если только будет известен объем какой-нибудь одной пирамиды. Но так как объем пирамиды с квадратным основанием и двумя граниями под углом в 45° известен, то, следовательно, будет известен объем и всякой пирамиды эти объемы будут находиться в том же отношении, что и соответствующие сечения, т. е. основания; таким образом, объем любой пирамиды будет равняться одной трети произведения основания на высоту. Что же касается доказательства Евдокса, то всю цепь его рассуждений мы легко можем восстановить на основании изложения Евклида.

1) Если параллелепипедальное тело будет рассечено плоскостью по диагоналям противоположных граней, то это тело будет рассечено упомянутой плоскостью пополам («Начала», предложение 28 книги XI).

2) Если будут две равновысотные призмы, и у одной основание параллелограмм, у другой же треугольник, причем параллелограмм в два раза больше треугольника, то призмы будут равны (предложение 39 книги XI).

3) Всякая пирамида, имеющая треугольное основание, разделится на две равные и подобные друг другу и всей пирамиды с треугольными основаниями и на две равные призмы; и обе призмы вместе будут больше половинной всей пирамиды (предложение 3 книги XII).

4) Если будут две пирамиды под одной высотой, имеющие треугольные основания, и каждая из них будет разделена на две равные друг другу и подобные всей пирамиды и на две равные призмы, то будет как основание одной пирамиды к основанию другой пирамиды, так и все призмы в одной пирамиде к взятым в таком же количестве призмы в другой пирамиде (предложение 4 книги XII).

5) Находящиеся под одной высотой пирамиды с треугольными основаниями будут друг к другу, как основания (предложение 5 книги XII).

6) Всякая призма, имеющая треугольное основание, разделяется на три равные друг другу пирамиды, имеющие треугольные основания (предложение 7 книги XII).

7) Подобные пирамиды, имеющие треугольные основания, будут в тройном отношении соответственных сторон (предложение 8 книги XII).

8) У равных пирамид, имеющих треугольные основания, основания будут обратно пропорциональны высотам; и у каких пирамид, имеющих треугольное основание, основания будут обратно пропорциональны высотам, те пирамиды будут равны (предложение 9 книги XII).

Все эти теоремы представляют непрерывную цепь предложений, из которых каждое последующее (кроме 3-го) ссылается на предыдущее. Мы исключили лишь 6-е предложение книги XII, потому что: 1) в нем говорится о пирамиде с многоугольным основанием, тогда как во всех остальных, в частности в 8-м и 9-м, говорится лишь о треугольных пирамидах, хотя и 8-е и 9-е предложения справедливы для всяких пирамид, 2) упомянутое предложение отсутствует в Болонском манускрипте «Начал», представляющем несколько отличную редакцию. Можно не сомневаться в принадлежности 6-го предложения Евклиду, но последний по всей вероятности просто вставил его в общую цепь евдоксовых предложений, не обобщив соответственно 8-е и 9-е предложения.

Принадлежность этих теорем Евдоксу, а не Евклиду, доказывался следующими соображениями.

В евклидовом определении призмы (определение 13 книги XII) говорится о теле, в котором две противоположные «грани» равны, подобны и параллельны (*ἴσα τὰ ἑλκνῶν· τὴν δὲ τὴν ἀπὸ τῆς αὐτῆς πλάτης*), а об основаниях не говорится ни слова, в то время как в упомянутых предложениях говорится о призмах, имеющих *основаниями* параллелограмм, противоположным же (*ἀπεναντίας δὲ*) прямую.

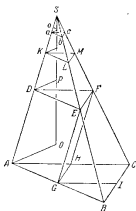
Затем метод исчерпывания в 5-м предложении в точности воспроизводит рассуждения при доказательстве 2-го предложения о равенстве кругов, почему и нет надобности в комментарии повторять соответствующие рассуждения.

Наконец, так как в широкой публике распространено мнение о принадлежности Лежандру известного доказательства с так называемой «чертовой лестницей» (это мнение встречается, между прочим, и у С. Я. Лурье «Теория бесконечно малых у древних атомистов», М.—Л., 1935, стр. 75; «Очерки по истории античной науки», М.—Л., 1947, стр. 171), то несомненно будет привести подлинную аргументацию Лежандра, тем более, что она представляет последний случай применения метода исчерпывания для доказательства рассматриваемой теоремы.

Доказав в 17-м предложении VI книги лемму, аналогичную 3-му предложению XII книги Начал, Лежандр формулирует рассматриваемую теорему следующим образом²¹:

Предложение 18

Теорема. Объем треугольной пирамиды равен одной трети произведения ее основания на высоту.



Черт. 20.

Пусть, $SABC$ будет какая-нибудь треугольная пирамида, ABC ее основание, SO ее высота (черт. 20); я утверждаю, что объем пирамиды $SABC$ будет равен трети произведения площади ABC на высоту SO , так что мы будем иметь:

$$SABC = \frac{1}{3} ABC \times SO,$$

$$\text{или} = SO \times \frac{1}{3} ABC.$$

Действительно, в противном случае объем $SABC$ был бы равен произведению SO на площадь, большую или меньшую $\frac{1}{3} ABC$.

Пусть 1° это количество будет большим, так что

$$SABC = SO \times \left(\frac{1}{3} ABC + M \right)$$

Если мы сделаем то же самое построение, что и в предыдущем предложении, то пирамида $SABC$ будет разделена на две равно-
великие друг другу призм $AGHFDE$, $EGRFHN$ и на две равные пирамиды $SDFE$, $EGBI$. Но объем призм $AGHFDE$ будет DEF на PQ , и следовательно, объем двух призм будет $DPE \times 2PQ$, или $DPE \times SO$. Если опять две призм из всей пирамиды, то остаток будет равен удвоенной пирамиде $SDFE$, так что мы будем иметь:

$$2SDFE = SO \times \left(\frac{1}{3} ABC + M - DEF \right).$$

²¹ «Eléments de géométrie», Paris, 1817, стр. 186.

Но поскольку SA вдвое больше SD , поверхность ABC будет вчетверо больше DFE , и, таким образом, $\frac{1}{3} ABC - DFE =$
 $= \frac{4}{3} DFE - DFE = \frac{1}{3} DFE$; так что

$$2SDEF = SO \times \left(\frac{1}{3} DEF + M \right);$$

если взять по половине от каждой части, то получится

$$SDEF = SP \times \left(\frac{1}{3} DEF + M \right).$$

Отсюда видно, что для получения объема пирамиды $SDEF$ нужно будет к трети ее основания прибавить ту же самую площадь M , которая прибавлялась к трети основания большой пирамиды, и умножить все на высоту SP малой пирамиды.

Если мы также разделим SD пополам в точке K и через точку K проведем параллельно DEF плоскость KLM , которая встретит перпендикуляр SP в Q , то то же самое рассуждение покажет, что объем пирамиды $SKLM$ будет равен $SQ \times$
 $\times \left(\frac{1}{3} KLM + M \right)$.

Продолжая таким образом получать ряд пирамид, стороны которых уменьшаются вдвое, а основания вчетверо, мы достигнем когда-нибудь пирамиды $Sabc$, основание которой будет меньше $6M$; пусть So будет высота этой последней пирамиды, а ее объем, выведенный по правилу получения объема предыдущих пирамид, будет $So \times \left(\frac{1}{3} abc + M \right)$. Но $M > \frac{1}{6} abc$,

и следовательно, $\frac{1}{3} abc + M > \frac{1}{2} abc$; следовательно, нужно,

чтобы объем пирамиды $Sabc$ был больше, чем $So \times \frac{1}{2} ab$. Результат пеленый, потому что во втором следствии из предыдущего предложения было доказано, что объем треугольной пирамиды всегда меньше половины произведения ее основания на высоту; таким образом, 1° невозможно, чтобы объем пирамиды $SABC$ был больше $SO \times \frac{1}{3} ABC$.

Упомянутое здесь второе следствие Лежандр доказывал так: «Если провести прямые DG DH , то получится новая пирамида $ADGH$, которая будет равна пирамиде $SDEF$. Таким образом пирамида $ADGH$ будет меньше призмы $AGHDEF$, поскольку она в ней содержится; значит, каждая из пирамид $SDEF$, $EGBI$ будет меньше призмы $AGHDEF$, значит, пирамида $SABC$, состоящая из двух пирамид и двух призм, будет меньше четырех

этих призм. Но объем одной из этих призм — $\frac{1}{3} ABC \times SO$, а учетверенный объем — $\frac{1}{3} ABC \times SO$; значит, объем всякой треугольной пирамиды меньше половины произведения её основания на высоту.

После этого Лежандр переходит к опровержению второй гипотезы:

«Пусть 2°

$$SABC = SO \times \left(\frac{1}{3} \cdot ABC - M \right),$$

как и в первом случае, докажем, что объем пирамиды $SDEF$, измеренный высотой в два раза меньше, будет равен $SP \times \left(\frac{1}{3} \cdot DEF - M \right)$, и продолжая ряд пирамид, стороны которых умножаются вдвое до некоторого члена $Sabc$, мы таким образом

получим, что объем последней пирамиды $Sabc = SO \times \left(\frac{1}{3} \cdot abc - M \right)$.

Но, поскольку основания $ABC, DEF, LKM, \dots, abc$ образуют убывающий ряд, каждый член которого составляет четверть предыдущего, то мы скоро придем к члену abc , равному $12M$, или же который будет заключаться между $12M$ и $3M$; тогда, так как M равен или более $\frac{1}{12} abc$, то величина $\frac{1}{3} abc - M$ будет

или равна $\frac{1}{4} abc$, или же меньше $\frac{1}{4} abc$; таким образом, объем пи-

рамиды $Sabc$ будет или равен, или меньше $SO \times \frac{1}{4} abc$. Результат

также нелепый, потому что, согласно первому следствию предыдущего предложения, объем треугольной пирамиды всегда будет больше, чем четверть произведения её основания на высоту; значит, 2° объем пирамиды $SABC$ не может быть меньше $SO \times \frac{1}{3} ABC$.

Итак, наконец, объем пирамиды $SABC$ равен $SO \times \frac{1}{3} ABC = \frac{1}{3} ABC \times SO$ согласно выражению теоремы.

Упомянутое следствие 1° Лежандр доказывает так:

«Пусть из вершины S будет опущен на плоскость ABC перпендикуляр SO и пусть P — точка, в которой этот перпендикуляр встречает плоскость DEF , параллельную ABC ; поскольку

$SD = \frac{1}{2} SA$, то $SP = \frac{1}{2} SO$ и треугольник $DEF = \frac{1}{4} ABC$; зна-

чит, объем призмы $AOHFDE = \frac{1}{4} ABC \times \frac{1}{2} SO$, а объем двух

призм $AGHFD E$, $EGICPH$ вместе — $\frac{1}{4} ABC \times SO$. Эти две призмы будут меньше пирамиды $SABC$, поскольку они в ней содержатся; значит, *объем треугольной пирамиды будет больше четверти произведения ее осевой на высоту»* (М. В.).

12. Теорема Дена. Теорема о равенстве двух треугольных пирамид с равновеликими основаниями и равными высотами доказывается или античным методом *и чертятся*, или *теорией преобразования*.

Но совершенно не удается доказательство по образцу доказательства равенства пирамид с равными основаниями и равными высотами.

Пирамиду не удается разделить на соответственно равные части, предварительно пополав по новым частям так, чтобы получить тела, разделяющиеся на соответственно равные части, т. е. не удается доказать равенство *разного* тел — *похожести или равенства* — *похожести с делением*.

Невозможность этого подозревалась многими математиками, но строгое доказательство удалось дать только Дену³² и В. Ф. Кагану³³.

Таким образом, употребление перехода к пределу при современном понимании последнего неизбежно при доказательстве того, что пирамида есть третья часть призмы той же высоты и с тем же основанием.

13. Теорема об объеме треугольной пирамиды³⁴. Мало известен еще особый путь, приводящий к объему треугольной пирамиды. Немецкая методическая литература (а также и русская XVIII и начала XIX веков) находится под сильным влиянием Х. Вольфа³⁵. Но у наиболее крупного ее представителя, Кестнера, исчезает интересная теория подобия, привнесенная Вольфом. Мы напомним, что в основе этой теории лежит аксиома:

Если две фигуры или две линии производятся теми же операциями и теми же элементами, над которыми эти операции производятся, то и фигуры и линии подобны.

Теория подобия Х. Вольфа возрождается у французского математика Сюзана, ныне уже забытого, несмотря на его остроумные идеи. Пользуясь идеями Вольфа, Сюзан не идет по пути, который закрывается теоремой Дена, но вместе с тем и не пользуется теорией пределов.

³² «Götting. Nachrichten», 1900 г., стр. 345. — «Math. u. Naturw.», Bd. 55 (1902), стр. 465 — 468.

³³ В. Ф. Каган, О преобразовании многогранников, М., 1933.

³⁴ Д. Д. Мордухай-Болтовской, Теория подобия Х. Вольфа и постулат де Левека (Вестник опытной физики и элементарной математики, Одесса, 1916).

³⁵ Chr. Wolffus, Anfangsgründe der mathematischen Wissenschaften, 1750.

В основе его доказательства лежит постулат, который он приписывает Левеку:

Если мы имеем тело P и производим построение тела Q с помощью операций, определенных *только формой* тела P , то отношение объемов тела P и Q не зависит от размера P , т. е. сохранится, когда переходят от тела P к ему подобному P' и на основе прежнего построения получают тело Q' :

$$\text{об. } P : \text{об. } Q = \text{об. } P' : \text{об. } Q'.$$

Таковой операцией является, например, деление сегмента и угла на равные части и т. п. Конечно, постулат этот выводится из упомянутой выше аксиомы

Х. Вольфа. То, что Левек и Сюзан называют *операцией, определяемой только формой тела*, Х. Вольф называет просто *операцией над подобными элементами*.

Согласно аксиоме Х. Вольфа, если тела P и P' подобны и тела Q и Q' подобны, то тогда подобны и пары (P, Q) и (P', Q') и поэтому отношения $\text{об. } P : \text{об. } Q$ и $\text{об. } P' : \text{об. } Q'$ равны между собой.

Вместо тел P и Q можно брать площади или *резки* и формулировать обобщенный постулат Левека следующим образом:

Если мы из подобных фигур S и S' с помощью одинаковых построений (в смысле Х. Вольфа) получаем сперва P и P' , а затем Q и Q' , то будем иметь:

$$P : Q = P' : Q'.$$

Определение же объема треугольной пирамиды совершается следующим образом (черт. 21).

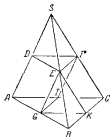
В пирамиде $SABC$ проводится плоскость DEF , параллельная основанию ABC , плоскость FGK , параллельная SAC , и плоскость $EFIG$, параллельная ребру SA .

Пусть D — середина SA ; тогда

$$SD = \frac{1}{2} SA, \quad BK = \frac{1}{2} BC$$

и пирамида $SABC$, которую мы обозначим через P , разлагается на две треугольные пирамиды $AGIDEF$ и $IFKIFC$, которые мы обозначим через Q и Q_1 , и две треугольные равные пирамиды $SDEF$ и $FGBK$, каждую из которых мы обозначим через P' .

Объем первой пирамиды Q равен произведению площади основания AGI на высоту, т. е. на $\frac{1}{2} h$, где h — высота данной пирамиды P .



Черт. 21.

Объём второй призмы (Q_2), которая является половиной параллелепипеда с основанием $GKCI$ и высотой $= \frac{1}{2}h$, равен произведению площади основания $GKCI$ на половину высоты этого параллелепипеда, т. е. на $\frac{1}{4}h$. Значит, объём призмы Q_2 равен $\frac{1}{2}$ площади $ABC \cdot \frac{1}{4}h = \frac{h}{8}$ пл. ABC .

Так как площадь $GKCI$ вдвое больше площади AGI , то из предыдущего ясно, что объёмы обеих треугольных призм равны между собой благодаря чему мы можем обозначить их одной и той же буквой Q .

Итак,

$$\text{об. } P = 2 \text{ об. } P' + 2 \text{ об. } Q. \quad (1)$$

Пусть Q' будет призма, вписанная в пирамиду $SDEF$ так же, как призма Q , т. е. $DEFAGI$, вписана в $SABC$; тогда

$$\frac{\text{об. } P}{\text{об. } Q} \cdot \frac{\text{об. } Q}{\text{об. } Q'} = 2 \frac{\text{об. } P'}{\text{об. } Q'} + 2 \frac{\text{об. } Q}{\text{об. } Q'}.$$

Обозначим отношение объёмов P и Q через λ . Тогда

$$\lambda \cdot \frac{\text{об. } Q}{\text{об. } Q'} = 2 + 2 \frac{\text{об. } Q}{\text{об. } Q'}. \quad (2)$$

Отношение $\text{об. } Q : \text{об. } Q'$ равно отношению произведений оснований этих призм на их высоты. Но отношение оснований призм равно отношению оснований пирамид, в которые они вписаны, т. е. равно 4, отношение же высот равно 2. Значит, отношение объёмов равно 8.

Из уравнения (2) получаем:

$$8\lambda = 2 + 2 \cdot 8,$$

что даёт $\lambda = \frac{8}{3}$. Таким образом,

$$\text{об. } P = \frac{8}{3} \text{ об. } Q = \frac{8}{3} \cdot \frac{h}{8} \cdot \text{пл. } ABC = \frac{1}{3} h \cdot \text{пл. } ABC.$$

14. Объёмы многогранников. Евклид даёт предложения, относящиеся только к сравнению объёмов. Но седьмое предложение, разлагающее призму на три равновеликие треугольные пирамиды, ведёт непосредственно к формуле для вычисления объёма пирамиды. У Герона мы находим правила для вычисления призматических и пирамидальных тел, в том числе и бесисков.

Наиболее важным результатом относительно призм, представляющим прекрасное дополнение к «Началам» Евклида, является теорема Лежандра о том, что косая усечённая призма равновелика трём пирамидам с основанием этой призмы и с вер-

шинами в точках пересечения боковы́х ребер с секущей плоскостью.

Гирш⁸⁰⁾ выражает боковую поверхность и объём усеченной призмы следующей словесной формулой: если назвать *прямой тяжести* прямую, параллельную боковым ребрам и проходящую через центр тяжести нормальных сечений, то боковая поверхность будет равна произведению периметра нормального сечения на прямую тяжести, а объём определится, как произведение площади нормального сечения на прямую тяжести.

Формула для объёма пирамиды, усечённой параллельно основанию, в виде

$$V = \frac{1}{3} H (G_1 + \sqrt{G_1 G_2} + G_2),$$

где G_1, G_2 — площади оснований, а H — высота, в европейской математике впервые приводится конечно, в риторически-геометрической форме) Леонардо Пизанским и заимствуется им из арабских источников. Вычисление по правилу, определяемому этой формулой, находится у Мохамеда бен-Музы.

В дошедших до нас греческих источниках мы находим у Герона формулу для объёма правильной квадратной усеченной пирамиды, выражаемую на современном алгебраическом языке так:

$$V = H \left[\frac{(a_1 + a_2)^2}{4} + \frac{1}{3} \left(\frac{a_1 - a_2}{2} \right)^2 \right],$$

где

$$H = \sqrt{K^2 - \frac{1}{2} (a_1 - a_2)^2},$$

a_1, a_2 — стороны квадрата верхнего и нижнего оснований, K — ребро, H — высота усечённой пирамиды.

Формула эта находится в «Практической геометрии» Клавия (1606) и Адриана (1626). Формулы показывались раньше всегда алгебраически. Находящийся в наших учебниках геометрический вывод ведёт своё начало от Лейбница.

15 Принцип Кавальери. Если мыслить площадь состоящей из точек или «линий», то можно прийти к следующему выводу: если мы имеем две площади, заключённые между двумя параллельными прямыми AB и $A'B'$ и дугами кривых, то эти площади равны, если равны их сечения aa' и bb' любой прямой, параллельной данным прямым (черт. 22).

В этом состоит принцип Кавальери для площадей. Его стереометрический аналог относится к объёмам:

Если мы имеем два тела, заключённые между двумя параллельными плоскостями AB и $A'B'$ и поверхностями, то

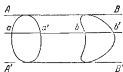
⁸⁰⁾ Meyer-Hirschen, Geometrische Aufgaben, 1802.

объёмы этих тел равны, если равны велики их сечения aa' и bb' любой плоскостью, параллельной данным плоскостям (черт. 23).

Мы приведём сейчас два примера, дающие применение этих принципов.

Равновеликость треугольников ABC и $A'B'C'$, имеющих равные высоты и равные основания AB и $A'B'$, обнаруживается расположением их между двумя параллельными прямыми $ABA'B'$ и CC' , расстояние между которыми как раз равно высоте (черт. 24).

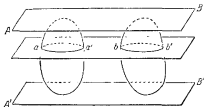
Согласно принципу Кавальери следует только убедиться в том, что $KL = K'L'$, если $KLK'L' \perp ABA'B'$, а это обнаруживается следующим образом: $KL \perp AB$, $CN \perp CI$, по так как $AB = A'B'$, $CH = C'H'$, $CI = C'I'$, то и $KL = K'L'$.



Черт. 22.

Совершенно аналогичным путём устанавливается равновеликость треугольных пирамид $SABC$ и $S'A'B'C'$ при равновеликости их оснований и равенстве высот (черт. 25).

Согласно принципу Кавальери, следует установить равновеликость сечений abc и $a'b'c'$, полученных плоскостями, параллельными двум плоскостям, из которых одна содержит основания пирамид ABC и $A'B'C'$, а другая — их противоположные вершины S и S' .



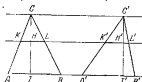
Черт. 23.

Обозначив через SD и $S'D'$ высоты рассматриваемых пирамид, а через H и H' точки встречи этих высот с секущей плоскостью, будем иметь:

$$\begin{aligned} abc:ABC &= SH^2:SD^2, \\ a'b'c':A'B'C' &= S'H'^2:S'D'^2 \end{aligned}$$

Из того, что $ABC = A'B'C'$, $SH = S'H'$, $SD = S'D'$, следует, что и $abc = a'b'c'$.

16. Криволинейные поверхности в древнем Египте. Первый в истории математика пример, в котором мы имеем дело с определенным некоторой криволинейной поверхности, встречаем на почве древнего Египта: это знаменитая 10-я задача Московского папируса



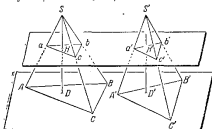
Черт. 24.

Глава действия
«с корзиной» *)

Как скажут тебе: «корзина», в устье по $4\frac{1}{2}$ в . грани-
цад (cd — земля на краю пу-
стыни, пограничной с правиль-
но орошаемой областью). О, дай знать площадь (ndt) её.

Действуй ты, сделай ты $\frac{1}{9}$ от 9, потому что вот «корзинка» —
 $\frac{1}{2}$ это от ... (ndt)?; получается теперь 1.

Действуй ты, сделай остаток; вот



Черт. 25.

Действуй ты, сделай ты $\frac{1}{9}$ от 6; получается теперь $\frac{2}{3}$
 $\frac{1}{6} \frac{1}{18}$.

Действуй ты, сделай ты остаток этих 8 после этих $\frac{2}{3} \frac{1}{6}$
 $\frac{1}{18}$; получается теперь $7\frac{1}{9}$.

*) Во всех этих местах «корзинка» (ndt) пишется не фонетически — буквами, а просто изображается рисунком .

Действуй ты, сделай ты $7\frac{1}{9}$ раз $4\frac{1}{2}$; получается теперь 32. Смотри площадь её +го.

Нашли ты хорошо.

Рассматриваемая задача вызвала большие споры по поводу того, что нужно понимать под «корзинкой». Издавший этот текст акад. В. В. Струве толкует её как полушар, другие же исследователи — как полцилиндр. Очень досадно, что на самом интересном месте («корзинка — половина что от...») рукопись испорчена. Акад. Струве толкует выпавшее слово как *antr*, и понимает его как «айцо», бывшее по его мнению у египтян названным шара. Это чтение встречает возражения со стороны других исследователей, так что вопрос окончательно решённым считать нельзя.

Есть, однако, некоторые основания думать, что под *antr* лучше понимать полцилиндр, имеющий осевое сечение в виде квадрата.

Прежде всего следует привести некоторые технологические соображения. Из какого материала была изготовлена эта *antr*? Можно дать два возможных решения: или *antr* изготовлялась из глины, или же она была сплетена из прутьев или тростника. В первом случае легко было приготовить её в виде полушара, но мы получили бы очень неустойчивый предмет, и, кроме того, встал бы вопрос, какую цель могло бы преследовать знание боковой поверхности *antr*. Во втором случае, если корзинка получалась плетением, форма полушара является исключительной (ее просто будет очень трудно получить, тогда как форма цилиндрического корыта будет очень удобной и с точки зрения изготовления, и с точки зрения устойчивости. Кроме того, сразу получает практический смысл определение боковой поверхности такого корытца: можно будет рассчитать, сколько таких плетенок получится из большого листа заданной площади.

Во вторую очередь идут терминологические соображения. «Корзинка» определяется как имеющая *antr* $4\frac{1}{2}$ и $^c d$

(с детерминативом множественного числа) = в устье по $4\frac{1}{2}$ в «границах». Из двух возможных толкований акад. Струве: 1) $^c d$ — сохранность, неприкосновенность, что он понимает в смысле большого круга, и 2) $^c d$ — страна на краю пустыни, граничащей с орошаемой областью — второе толкование представляется более приемлемым; египтяне любили искусственные фигуральные выражения; так, например, встречающееся в этом контексте слово *tr-rt* — устье, буквально означало (полюва) рта — употреблялось и для обозначения основания равнобедренного треугольника, последний изображался лежащим на боковой стороне и представлял нечто вроде контура раскрытого рта; затем, термин *mrjt* — высота равнобедренного треугольника — буквально обозначает «обрезанный край плотины». В связи с такой термино-

логией лучше понимать ḥd в смысле «край, граница», тем более, что при таком понимании легко объяснилось бы и наличие детерминатива множественного числа: «по $4\frac{1}{4}$ в границах», ибо круг ограничен одной линией, а квадрат — четырьмя.

Если рассматривать корзину или изображающий её символ $\bigcirc$ как полукруг, то испорченное слово, которое Ахад. Струве толкует как «яйцо», пришлось бы понимать как «круг» или «цилиндр». Основной вопрос заключается в том, почему надо удваивать диаметр, если корзина является *пол-вином* яйца.

Однако, будем ли мы понимать $i[qr]$ как шар или как круг (цилиндр), всё равно мы должны допустить, что египтяне умели определять длину окружности. Нужный для этого процесс можно восстановить так:

Египтяне определяли площадь круга как площадь квадрата сторона которого равнялась $\frac{8}{9}$ диаметра круга. Из значения числа π определялось из равенства

$$\frac{\pi D^2}{4} = \left(\frac{8}{9} D\right)^2,$$

что соответствует

$$\pi = 4\left(\frac{8}{9}\right)^2.$$

В таком случае длина окружности диаметра D будет

$$\pi D = \left(\frac{8}{9}\right)^2 \cdot 4D,$$

а длина полуокружности

$$\left(\frac{8}{9}\right)^2 \cdot 2D.$$

Именно по этой формуле египтянин и велёл свои вычисления: удваивает диаметр $\left(2 \times 4\frac{1}{4} = 9\right)$, дважды множит его на $\frac{8}{9}$ и получающий результат $7\frac{1}{9}$ — длину полуокружности — множит на $4\frac{1}{2}$, получая таким образом боковую поверхность полуцилиндра с квадратным осевым сечением.

Здесь следует сделать одно замечание относительно техники вычисления: при умножении на $\frac{8}{9}$ египтянин представлял мно-

жителю в виде $1 - \frac{1}{9}$ и затем производил умножение, как мы сказали бы, раскрывая скобки.

$$9 \left(1 - \frac{1}{9}\right) = 9 - \frac{1}{9} \cdot 9 = 8,$$

$$8 \left(1 - \frac{1}{9}\right) = 8 - \frac{1}{9} \cdot 8 = 7\frac{1}{9}^*.$$

Окончательное умножение $4\frac{1}{2} \times 7\frac{1}{9}$ египтянин производил так:

$$\begin{array}{r} \diagup 1 \quad 4\frac{1}{2} \\ \diagdown 2 \quad 9 \\ \diagup 4 \quad 18 \\ \diagdown 1 \quad \frac{1}{2} \\ \hline \text{Всего } 7\frac{1}{9} \quad 32. \end{array}$$

Умножение производилось при помощи последовательных удвоений, после чего из полученных результатов нужные отмечались черточкой слева и складывались; сумма чисел левого столбца давала множителя, а правого — произведение (*И. В.*)

*) Запись промежуточных вычислений в папирусе несколько такая:

$$8 \left(1 - \frac{1}{9}\right) = 8 - 8 \cdot \frac{1}{9} = 8 - \left(\frac{6}{9} + \frac{2}{9}\right) = 8 - \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{9}\right).$$

Выражение для $\frac{2}{9} = \frac{1}{6} + \frac{1}{18}$ легко можно найти в таблиц разложений дробей $\frac{2}{n}$ в папирусе Rhind'a. Однако здесь мы имеем, по всей вероятности, только запись (египтяне не умели изображать одним символом дробь $\frac{8}{9}$, хотя, конечно, хорошо представляли, что это такое). И в данном случае, приходя к вычислению, египтянин вместо разности $8 - \frac{8}{9}$, вероятно, сразу получал $7\frac{1}{9}$, но записать вычитаемое он мог лишь только в виде $\frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18}$.

17. Объём конуса у Демокрита и Евдокса. Метод разложения тел на равновеликие «неделимые» при сравнении их объёмов одинаково применим и к конусу и к пирамиде, и, по всей вероятности, Демокрит находил объём конуса тем же самым приёмом, как и в случае пирамид; более того, весьма вероятно, что исходным пунктом рассуждений Демокрита был именно конус, как это вытекает из приведённого выше текста Плутарха.

Следующее доказательство теоремы относительно объёма конуса было дано Евдоксом; мы имеем его в 10—15 предложениях книги XII Евклида.

В первом из упомянутых предложений доказывается, что конус есть третья часть цилиндра с тем же основанием и высотой. Доказательство ведётся методом исчерпывания.

Мы предполагаем сначала, что цилиндр будет более чем в три раза больше конуса (объём P цилиндра $> 3V$, где V — объём конуса). Вписывая в основание конуса правильные многоугольники и строя на них равновысокие с конусом призм и продолжая путем последовательных удвоений этот процесс до тех пор, пока объём полученной призм не превзойдёт утроенного объёма конуса, мы докажем, что эта призма будет втрое больше пирамиды, имеющей те же основание и высоту, и значит, соответствующая пирамида будет больше конуса, что невозможно, поскольку она заключается внутри этого последнего.

Пусть теперь $P < 3V$ или $V > \frac{P}{3}$. Аналогичным приёмом строим внутри конуса пирамиду до тех пор, пока построенная пирамида не превзойдёт третьей части объёма цилиндра. Но эта пирамида в свою очередь будет третьей частью призм, имеющей с ней те же самые основание и высоту; эта же призма будет меньше цилиндра, в основание которого вписан многоугольник, образующий основание призм, что опять невозможно. Таким образом, остаётся лишь одно предположение $P = 3V$.

В 11-м предложении тем же самым методом исчерпывания доказывается, что объёмы равновысоких конусов или цилиндров будут относиться, как их основания.

Если V_1 и V_2 суть объёмы сравниваемых тел, а S_1 и S_2 — площади их оснований, то мы хотим доказать, что

$$S_1 : S_2 = V_1 : V_2.$$

Предположим, что это несправедливо и что

$$S_1 : S_2 = V_1 : X,$$

где X меньше или больше V_2 .

Пусть X будет сначала меньше V_2 . Вписывая в основание тела V_2 многоугольник, удваивая последовательно его стороны и строя на получающихся многоугольниках призм или пирамид (как в случае конуса), мы в конце концов получим пирамиду или призму, которая будет больше X . Теперь, если мы в основание тела V_1 впишем подобный многоугольник и построим

на неё пирамиду или призму, то объёмы обеих полученных призм или пирамид будут относиться, как их основания, или же, согласно предложениям 1 и 2, как площади кругов S_1 и S_2 . Но объём вписанной в тело V_1 пирамиды или призмы будет меньше V_1 , объём же вписанной в тело V_2 будет больше X , что противоречит предположению $S_1:S_2 = V_1:X$.

Предположим теперь, что $X > V_2$. Невозможность этого предположения доказывается тем, что отношение $X:V_1$ мы заменим отношением V_2 к некоторому меньшему, чем V_1 , телу, что по-только что доказанному невозможно.

Таким образом, остаётся лишь одна возможность:

$$S_1:S_2 = V_1:V_2.$$

Совершенно аналогичным методом доказывается и предложение 12 о том, что объёмы подобных конусов или цилиндров относятся, как кубы диаметров; только перед доказательствам основной теоремы Евклид показывает, что вписываемые призм или пирамиды будут подобны и, следовательно, согласно предложению 8, их объёмы будут относиться, как кубы диаметров.

Предложение 13 является своего рода леммой (доказательство аналогично предложению 1 книги VI и предложению 25 книги XI) и предложению 14, гласящему, что объёмы конусов или цилиндров с одним и тем же основанием относятся, как их высота. Для нас, привыкших к формулам, в равенстве

$$V = \frac{1}{3} h \cdot S$$

высота h и площадь основания S являются арифметически равноправными, — нет необходимости в специальных доказательствах, относящихся к основаниям или к высотам. Для Евклида же, никогда не отрывающегося от геометрических образов, предложения 11 и 14 являются существенно различными и требуют специальных доказательств.

То же самое можно сказать и о предложении 15, где говорится, что при равенстве объёмов двух конусов или цилиндров их высоты будут относиться обратно пропорционально их основаниям ($H \cdot B$).

18. Поверхность цилиндра и конуса у Архимеда. Евклид определяет только объёмы цилиндра и конуса; боковые поверхности этих тел были найдены Архимедом в предложениях 13 и 14 первой книги «О шаре и цилиндре». Мы даём здесь эти предложения в современных обозначениях.

«Предложение 13

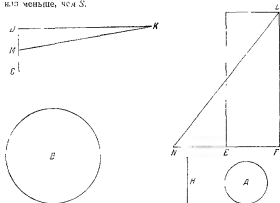
Боковая поверхность каждого прямого цилиндра равна кругу, радиус которого есть средняя пропорциональная между стороной (т. е. образующей) цилиндра и диаметром его основания.

Пусть круг A будет основание цилиндра, CD равна диаметру этого круга и EF равна высоте цилиндра.

Пусть H будет средней пропорциональной для CD и EF , а B — круг с радиусом H .

Тогда круг B будет равен боковой поверхности цилиндра, которую мы обозначим через S (черт. 26).

Если бы B и S не были равны, то B должна быть или больше, или меньше, чем S .



Черт. 26.

I. Допустим $B < S$. Тогда возможно вписать в круг B правильный многоугольник и описать около него другой так, чтобы отношение второго к первому было бы меньше отношения $S:B$.

Пусть это будет сделано; опишем около A многоугольник, который будет подобен описанному около B ; затем на многоугольнике вокруг A построим призму с той же самой высотой, что и цилиндр. Эта призма будет, следовательно, описанной около цилиндра.

Пусть KD будет перпендикулярна к CD и FL перпендикулярна к EF , и обе будут равны периметру многоугольника около A . Разделим CD в M пополам и соединим M с K .

Тогда

$\triangle KDM$ — многоугольник около A .

Точно так же

$\square FL$ — боковая поверхность призмы.

Продолжим FE до N так, чтобы $FE = EN$, и соединим N с L .

Теперь, так как многоугольники около A и B подобны, то они относятся, как квадраты радиусов A и B

Таким образом:

$$\frac{\triangle KDM}{\text{многоугольник около } B} = \frac{MD^2}{H^2} = \frac{MD^2}{CD \cdot EF} = \frac{MD}{NF} = \frac{\triangle KDM}{\triangle LFN},$$

так как $DK = FL$.

Следовательно,

многоугольник около $B = \triangle LFV - \square FL =$ боковой поверхности призмы около A согласно предыдущему.

Но

многоугольник около B : многоугольник в $B < S:B$, следовательно,

$$\frac{\text{боковая поверхность призмы около } A}{\text{многоугольник в } B} < \frac{S}{B},$$

или

$$\frac{\text{боковая поверхность призмы около } A}{S} < \frac{\text{многоугольник в } B}{B},$$

что невозможно [ибо боковая поверхность призмы больше, чем S , тогда как вписанный в круг B многоугольник меньше, чем B].

Итак, B не может быть меньше S .

II. Допустим $B > S$.

Опишем около круга B правильный многоугольник и вне нем в него другой так, чтобы

$$\frac{\text{многоугольник около } B}{\text{многоугольник в } B} < \frac{B}{S}.$$

Впишем в круг A многоугольник, который был бы подобен вписанному в B , и из многоугольника в A построим призму с той же высотой, что и диаметр.

Пусть опять обе начерченные линия DK , FL будут равны периметру многоугольника в A .

Тогда в данном случае будет

$$\triangle KDM > \text{многоугольник в } A,$$

ибо перпендикуляр из центра на одну из сторон многоугольника будет меньше радиуса A .

Далее,

$$\triangle LFN = \square EL - \text{боковой поверхности призмы.}$$

Теперь будет

$$\frac{\text{многоугольник в } A}{\text{многоугольник в } B} = \frac{MD^2}{H^2} = \frac{\triangle KDM}{\triangle LFN},$$

как и выше.

Далее,

$$\triangle KDM > \text{многоугольник в } A.$$

Следовательно, также и

$\triangle LFN$ или боковая поверхность призма $>$ многоугольник в B .

Но это невозможно, потому что:

$$\frac{\text{многоугольник около } B}{\text{многоугольник в } B} < \frac{B}{S}$$

и подавно

$$\frac{\text{многоугольник около } B}{\text{многоугольник в } B} < \frac{\text{многоугольник около } B}{S},$$

так что

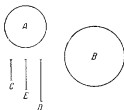
(многоугольник в B) $> S$ и подавно $>$ боковой поверхности призма.

Таким образом, B ни больше, ни меньше S , значит:

$$B = S.$$

Предложение 14

Боковая поверхность каждого равнобедренного конуса равна кругу, радиус которого есть средняя пропорциональная между стороной (т. е. образующей) конуса и радиусом круга в основании.



черт. 27.

Пусть круг A будет основанием конуса, C равна радиусу этого круга, D равна стороне конуса и E средняя пропорциональная между C и D (черт. 27).

Начертим круг B , радиус которого равен E .

Тогда B должен быть равен боковой поверхности конуса, которую мы обозначим через S .

Если бы B и S не были равны, то B должен бы быть или больше, или меньше S .

1. Допустим $B < S$.

Опишем около круга B правильный многоугольник и подобный ему внешний так, чтобы отношение первого ко второму было меньше отношения $S:B$.

Около A опишем другой подобный многоугольник и на нём построим пирамиду с той же самой вершиной, что и у конуса.

Тогда будет:

$$\frac{\text{многоугольник около } A}{\text{многоугольник около } B} = \frac{C^2}{E^2} = \frac{C}{D} = \frac{\text{многоугольник около } A}{\text{боков. поверхн. пирамиды}}$$

[так как сторона (образующая) конуса равна апофеме описанной пирамиды].

Следовательно,

боковая поверхность пирамиды > многоугольнику около B .

Теперь

$$\frac{\text{многоугольник около } B}{\text{многоугольник в } B} < \frac{S}{B}.$$

Следовательно,

$$\frac{\text{боковая поверхность пирамиды}}{\text{многоугольник в } B} < \frac{S}{B},$$

что невозможно, так как боковая поверхность пирамиды больше, чем S , в то время как многоугольник в B меньше, чем B .

Итак, B не может быть меньше S .

II. Допустим $B > S$.

Возьмём опять правильные многоугольники, из которых один описан около круга B , а другой вписан в него так, чтобы отношение первого ко второму было меньше чем отношение $B:S$.

В круг A вписываем многоугольник, который был бы подобен вписанному в B , и строим на нём пирамиду, вершина которой та же, что и у конуса.

В этом случае будет:

$$\frac{\text{многоугольник в } A}{\text{многоугольник в } B} = \frac{C^2}{B^2} = \frac{C}{D} < \frac{\text{многоугольник в } A}{\text{боковая поверхность пирамиды}}.$$

Это ясно, так как отношение $C:D$ будет больше, чем отношение перпендикуляра из центра A на сторону многоугольника к перпендикуляру из вершины конуса на ту же сторону *.

Следовательно,

боковая поверхность пирамиды > многоугольнику в B .

Но

$$\frac{\text{многоугольник около } B}{\text{многоугольник в } B} < \frac{B}{S}.$$

Следовательно, и подавно

$$\frac{\text{многоугольник около } B}{\text{боковая поверхность пирамиды}} < \frac{B}{S},$$

что невозможно [так как многоугольник около B больше чем B , в то время как боковая поверхность пирамиды меньше, чем S].

* Д действительно, если через α обозначим половину центрального угла в A , а через β половину угла при вершине равнобокого треугольника, образующего грань пирамиды, то мы будем иметь, что отношение упомянутых перпендикуляров будет:

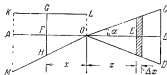
$$\frac{C \cdot \cos \alpha}{D \cdot \cos \beta} < \frac{C}{D},$$

так как при $\alpha > \beta$ будет $\cos \alpha < \cos \beta$.

Так как R не может быть ни больше, ни меньше S_1 , то значит,

$$B = S.$$

Высказанное выше предположение представляет окончательную форму доказательства, данного Архимедом рассматриваемой теореме. Что касается того, каким образом он *пришёл* к найденному результату, то мы можем восстановить общий ход его рассуждений, опираясь на изложенный им самим в Эфодике метод.



Черт. 28.

Вообразим равноплечий рычаг AOB , на плече OB которого прикреплен рассматриваемый конус — полый, если дело идёт об определении боковой поверхности, и сплошной, если дело

идёт об определении объема (Черт. 28).

Разобьём конус на бесконечно тонкие полоски толщины Δx , перенесём все их на конец B рычага и попытаемся каждую из этих полосок уравновесить некоторой массой, расположенной на левом плече рычага в точке F , расстояние которой от центра O равно расстоянию $x = OE$ переносимой полоски на правом плече рычага.

Если мы определяем боковую поверхность конуса, то масса вырезыной в точке E полоски будет

$$2\pi x \operatorname{tg} \alpha \cdot \Delta x,$$

а её момент после перенесения в точку B ($OB = h$) равен

$$2\pi x \operatorname{tg} \alpha \cdot \Delta x \cdot h.$$

Для того чтобы уравновесить этот момент, мы должны в точке F поместить массу $2\pi h \operatorname{tg} \alpha \cdot \Delta x$, для уравновешивания же всей боковой поверхности конуса, сосредоточенной в точке B , мы должны по левому плечу рычага распределить равномерно массы так, чтобы они образовали прямоугольник с высотой $FG = 2\pi h \operatorname{tg} \alpha$. Сравнивая теперь моменты справа и слева от точки O , будем иметь:

$$S \cdot OB = \frac{AO}{2} (AJ \cdot FG),$$

где S — искомая боковая поверхность. Отсюда

$$S = \frac{1}{2} h \cdot 2\pi h \operatorname{tg} \alpha = \pi h \cdot BC = \pi (\int h R) dz,$$

где $BC = R$ представляет радиус основания конуса.

При определении объема конуса элементарная масса в E б, дел.

$$\pi x h \operatorname{tg}^2 \alpha \Delta x,$$

её момент после перенесения в точку B

$$\pi x^2 h \operatorname{tg}^2 \alpha \Delta x;$$

в соответствующей точке F нужно будет поместить массу

$$\pi x h \operatorname{tg}^2 \alpha \Delta x = FH \cdot \Delta x.$$

Искомые ординаты $FH = xh \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot x$ расположатся по площади треугольника OAM , статический момент которого относительно O будет:

$$\left(\frac{1}{2} OA \cdot AM \right) \cdot \frac{2}{3} OA = \frac{1}{3} OA^2 \pi h^2 \operatorname{tg}^2 \alpha.$$

Этот момент будет равен моменту сосредоточенного в точке B объема V конуса

$$V \cdot OB = \frac{1}{3} OA^2 \pi h^2 \operatorname{tg}^2 \alpha,$$

откуда

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot OA \cdot (h \operatorname{tg} \alpha)^2 = \frac{1}{3} \pi \cdot OA \cdot BC^2.$$

(И В.)

19. Объем цилиндра и конуса. Доказательство того, что объем цилиндра (причем не обязательно кругового) равен произведению площади основания S на высоту h :

$$V = Sh, \quad (1)$$

может быть proved следующим образом.

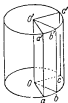
Взяв на нижнем основании цилиндра точку O и проведя прямую OO' , параллельную образующим, получаем точку O' на верхнем основании (черт. 29).

Строим на обоих основаниях вписанные многоугольники так, чтобы соответствующие вершины a и a' , b и b' , c и c' были на прямолинейно образующих.

Тогда цилиндры разбиваются на дольки

$$a_j = Oab \ O'a'b',$$

в каждом из которых будет заключаться трехгранная призмочка a_j и каждый из которых будет входить в трехгранную призмочку a_j . Получаемую делением многогранной призмы, описанной около цилиндра.



Черт. 29.

Если π_f — объем соответствующего домика, то

$$\pi_f < \pi_j < \pi_j;$$

отсюда

$$\frac{\pi_f}{\pi_j} < \frac{\pi_j}{\pi_j} = 1,$$

и если число f домиков беспрерывно увеличивается, то

$$\lim_{f \rightarrow \infty} \frac{\pi_f}{\pi_j} = \lim_{f \rightarrow \infty} \frac{\pi_j}{\pi_j} = 1,$$

где π_j — площадь оснований призмочек. Следовательно, в пределе $\pi_j = \pi_j + \pi_j$ и мы можем написать, что объем цилиндра

$$V = \lim \sum \pi_f = \lim \sum \pi_j \quad (2)$$

Но $\pi_j = \pi_j h$, где $\pi_j = \text{Одн.}$, а h — высота цилиндра. Значит, из равенства (2) получаем

$$V = \lim \sum \pi_j h = h \lim \sum \pi_j$$

и, заметив, что $\lim \sum \pi_j = S$, получаем формулу (1).

20. Предложение 17 книги XII. Рассматриваемое предложение заслуживает более внимательного анализа как следствие довольно больших размеров доказательства, в которых легко запутаться и потерять основную нить, так и вследствие некоторых логических скачков в ходе доказательства.

Прежде всего в самом начале доказательства Евклиду приходится пользоваться тем, что в сечении шара плоскостью получается круг, а если эта плоскость проходит через центр шара, то — наибольший круг. Эта теорема заслуживала бы более детального разбора, чем это сделал Евклид. Во-первых, данная ссылка на определение 14 книги XI доказывает только то, что всякое сечение шара плоскостью, проходящей через его ось, будет кругом; относительно же плоскостей, проходящих только через центр, а не через ось, вопрос остается открытым. Во-вторых, понятие о большем круге (у Евклида — наибольшем) шара нигде в «Началах» не определено и в данном месте появляется впервые и несколько неожиданно.

Дальнейший ход рассуждений сводится к тому, что Евклид в полученный большой круг сечения сферы вписывает правильный многоугольник с четным числом сторон, не касающийся сечения меньшей сферы. На сторонах этого многоугольника он строит вписанный в большую сферу многогранник, не касающийся поверхности меньшей сферы. Этот многогранник будет иметь ось симметрии, перпендикулярную к секущей плоскости большого круга; он разделяется на ряд секторов, опирающихся

на стороны правильного многоугольника, вписанного в основной большой круг. Заключающиеся в каждом секторе грани будут представлять постепенно уменьшающиеся по ширине четырёхугольники (доказывается, что четыре точки каждого четырёхугольника будут лежать в одной плоскости), самая же верхняя, прилегающая к оси симметрии грань будет треугольником; основания этого треугольника, а также верхнее и нижнее основания всех четырёхугольных граней будут параллельны и между собой, и плоскости большого круга сечения сферы.

После того как многогранник построен, Евклид переходит ко второй части доказательства. Ему нужно показать, что все грани полученного многогранника не будут касаться меньшей внутренней сферы, т. е. что опущенные из центра на эти грани перпендикуляры будут больше радиуса внутренней сферы.

Это доказательство Евклид проводит для наибольшего из полученных четырёхугольников-граней, а именно того, который прилежит к плоскости большого круга сечения сферы. В этом четырёхугольнике $BKSO$ три стороны BK , BO , KS равны, четвертая же SO будет меньше остальных. Легко доказав, что полученный четырёхугольник вписывается в круг, центр Z которого представляет основание перпендикуляра AZ , опущенного из центра A на рассматриваемую грань, Евклид переходит к основной части доказательства.



Черт. 31.

Из этого следует на основании обобщённой теоремы Пифагора (предложение 12 книги II), что

$$BK^2 > 2BZ^2, \quad OS^2 < 2BZ^2.$$

Первое неравенство Евклид только высказывает, не давая какого-либо доказательства, вероятно, считая это почти очевидным. После этого доказательство переходит на основную плоскость сечения большого круга $BCDE$. Из точки K Евклид опускает перпендикуляр KV на диаметр BD (черт. 31), не замечая при этом, что основание V этого перпендикуляра, как легко доказать, совпадает с основанием F перпендикуляра OF из точки O на плоскость круга $BCDE$. Действительно, в прямоугольных треугольниках BKV и BOF равны стороны BK и BO и острые углы KBV и OBV , откуда следует, что $BV = BF$.

Далее он последовательно пишет:

$$BD < 2DV, \quad BD \cdot BV < 2DV \cdot VB, \\ BK^2 < 2KV^2, \quad BZ^2 < KV^2.$$

При этом, по крайней мере с нашей точки зрения, остаётся неясным, зачем строится квадрат на BV и дополняется прямоугольником на DV .

После этого доказательство переходит опять в пространство сферы. Сравниваются между собой два её радиуса AB и AK :

$$AB^2 = AK^2, \\ BZ^2 + AZ^2 = AV^2 + KV^2.$$

Поскольку же $BZ < KV$, необходимо, чтобы AZ — рассматриваемый перпендикуляр на грань — был больше AV . Но AV всегда



Черт. 32.

может быть сделан больше радиуса внутренней сферы AH , что и доказывает эту теорему, по крайней мере для грани $BKSO$. Евклид считает, что тем самым теорема уже доказана и для всех остальных граней. Правда, поскольку грань $BKSO$, очевидно, является наибольшей из всех граней $SOPT$, $TPRU$, URX , то, очевидно, её расстояние от центра AZ будет, по аналогии с плагиметрией, наименьшим из всех расстояний других граней, но всё же это лишь «очевидно» и совсем не доказано, и автору «Начал» следовало бы это доказать обстоятельнее. Для этого достаточно было бы показать, что радиусы кругов, описанных около граней $BKSO$, $SOPT$, $TPRU$, URX будут постепенно уменьшаться по мере приближения к точке X .

Пусть $ABCD$, $A'B'C'D'$ будут два могущих быть вписанными в круг четырёхугольники (черт. 32) и пусть

$$AD = BC = A'D' = B'C',$$

причём

$$AB < AD, \\ A'B' < CD, \\ AB > CD > C'D'.$$

Требуется доказать, что радиус OA круга, описанного около первого четырёхугольника, будет больше, чем радиус $O'A'$ круга, описанного около второго четырёхугольника.

Клавий и Симсон доказывают это приведением к абсурду. Предположим (1), что

$$OA = O'A'.$$

Тогда отсюда следует равенство углов AOD , BOC , $A'O'D'$, $B'O'C'$. Затем

$$\angle AOB > \angle A'O'B', \quad \angle COD > \angle C'O'D',$$

откуда получается, что сумма четырёх углов вокруг O больше, чем сумма четырёх углов вокруг O' , что невозможно, ибо как та, так и другая сумма равна $4d$.

Пусть теперь (2)

$$OA < O'A'.$$

Из точки O радиусом $O'X = O'Y = O'Z = O'W = OA$ опишем окружность и построим четырёхугольник $XYZW$. Тогда

$$AB > A'B' > XY,$$

$$CD > C'D' > ZW,$$

$$AD = A'D' > WX,$$

$$BC = B'C' > YZ.$$

Опять получается, что углы при точке O в четырёхугольнике $ABCD$ составят в сумме больше, чем соответствующие углы при O' в четырёхугольнике $XYZW$, т. е. приходим к той же нелепости, что и в предыдущем случае.

Таким образом, у нас останется лишь одно предположение;

$$OA > O'A',$$

что и доказывает желаемое.

В «Приложении» к IV тому Евклида в издании Гейберга находится и другое доказательство того, что $AZ > AH$ (заключительная часть предложения 17).

«Вот можно и иначе более удобно доказать, что AZ будет больше AH . Проведём из H под прямыми (углами) к AH (прямую) HA' , и соединим AA' . Вот, рассекя дугу EB пополам и её половину пополам, и делая это постоянно, («в конце концов») получим в остатке некоторую дугу, которая будет меньше дуги круга $BCDE$, стягиваемой равной HA' (хордой). Пусть эта дуга получена и будет KB . Значит, прямая KB меньше HA' . И поскольку четырёхугольник $BKSO$ (может быть вписан) в круг и OB , BK , KS равны, а OS меньше (их), то угол BZK будет тупым. Значит, KB больше BZ . Но KA' больше KB ; значит, и подалше HA' будет больше BZ ; значит, и квадрат на HA' будет больше квадрата на BZ . И поскольку AA' равна AB , то и квадрат на AA' равен квадрату на AB . Но квадрату на AA' равны квадраты на AH , HA' ; квадрату же на AB равны квадраты на BZ , ZA ; значит, квадраты на AH , HA' равны квадратам на BZ , ZA , из которых квадрат на BZ будет меньше квадрата на HA' ;

Так как $MS = AC$ и $QS = AS$, то следует

$$MS \cdot SQ = CA \cdot AS = AO^2 = OS^2 + SQ^2.$$

И так как $HA = AC$, то получается

$$\frac{HA}{AS} = \frac{CA}{AS} = \frac{MS}{SQ} = \frac{MS^2}{MS \cdot SQ} = \frac{MS^2}{OS^2 + SQ^2},$$

что согласно стоящему выше равно

$$\frac{MN^2}{OP^2 + QR^2} = \frac{\text{круг с диам. } MN}{\text{круг с диам. } OP + \text{круг с диам. } QR}.$$

Это значит:

$$\frac{HA}{AS} = \frac{\text{круговое сечение цилиндра}}{\text{круг. сеч. шара} + \text{круг. сеч. конуса}}.$$

Поэтому круговое сечение цилиндра в занимаемом им положении будет в равновесии с круговым сечением шара вместе с круговым сечением конуса, если оба последних круга будут перенесены с их центрами тяжести в H .

То же самое имеет место для трёх соответствующих сечений плоскостью, которая будет перпендикулярна AC и проходит через любую другую прямую, находящуюся в параллелограмме EG и параллельную EF .

Если мы таким же образом рассмотрим все группы по три круга, по которым плоскости, перпендикулярные AC , пересекают цилиндр, шар и конус, и из которых складываются эти три тела, то следует, что цилиндр в занимаемом им положении будет относительно A в равновесии с вместе взятыми шаром и конусом, если последние перенесены центрами своей тяжести в H .

Так как K есть центр тяжести цилиндра, то, следовательно,

$$\frac{HA}{AK} = \frac{\text{цилиндр}}{\text{шар} + \text{конус } AEF}.$$

Но HA равно $2AK$, следовательно,

$$\text{цилиндр} = 2(\text{шар} + \text{конус } AEF).$$

Но

$$\text{цилиндр} = 3 \text{ конусам } AEF \quad [\text{Евклид, XII, 10}].$$

Следовательно,

$$\text{конус } AEF = 2 \text{ шарам.}$$

Но так как $EF = 2BD$, то будет:

$$\text{конус } AEF = 8 \text{ конусам } ABD.$$

Следовательно,

$$\text{шар} = 4 \text{ конусам } ABD.$$

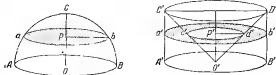
2) Через B, D проведем VBW, XDY параллельно AC и представим себе цилиндр, имеющий осью AC , а основаниями круги с диаметрами VX, WY .

В таком случае будет: цилиндр $VY = 2$ цилиндрам VD и 6 конусам $ABD = \frac{3}{2}$ шара, согласно доказанному выше. Это и требовалось доказать.

При помощи теоремы, что шар в четыре раза больше конуса, основание которого равно большому кругу, а высота — радиусу шара, я получил тот результат, что поверхность шара будет в четыре раза больше его большого круга; действительно, исходя из того обстоятельства, что каждый круг равен треугольнику, основание которого есть периметр, а высота — радиус круга, я подумал, что таким же образом и каждый шар будет равен конусу, основание которого равно поверхности шара, а высота равна радиусу.

Таким образом, из слов самого Архимеда вытекает, что он сначала нашёл объём шара, а потом уж его поверхность. Однако в окончательной обработке (вышеприведённое доказательство не было достаточно строгим по мнению Архимеда и могло служить только в качестве метода для открытия истины, а не для его доказательства) Архимед изменил порядок, в котором идут оба предложения, которые являются 33-м и 34-м предложениями первой книги «О шаре и цилиндре» (II, B).

22. Объём шара и принцип Кавальери. Очень красиво получается формула для объёма шара, если воспользоваться принципом Кавальери, предварительно переработав его в соответствии с современными идеями.



Черт. 34.

Поместим между двумя параллельными плоскостями (не показанными на черт. 34) полушару ABC и цилиндр $A'B'C'D'$ с основанием того же радиуса R , что и шар, и с высотой, равной радиусу, с выходящим из него конусом $C'D'O'$, который имеет своим основанием верхнее основание цилиндра, а вершиной — центр нижнего основания (черт. 34).

На основании принципа Кавальери мы вправе сделать заключение, что объём шара равен объёму тела, получаемого вырезыванием конуса из цилиндра. В самом деле, легко видеть, что

круг ab , полученный в сечении сферы плоскостью $aba'b'$, $ABA'B'$, равноудален с кольцом $a'e'd'b'$, получаемым в сечении вышеуказанного тела той же самой плоскостью. Действительно, на основании теоремы Пифагора в полусфере

$$Pb \quad r = \sqrt{R^2 - h^2}, \text{ где } h = OP,$$

и, следовательно, площадь сечения ab равна

$$S = \pi(R^2 - h^2);$$

с другой стороны, площадь круга $a'b'$

$$S' = \pi R^2,$$

а так как, очевидно, радиус круга $c'd'$ равен h , то площадь круга $c'd'$

$$S'' = \pi h^2.$$

Следовательно, площадь кольца $a'e'd'b'$ равна

$$S' - S'' = \pi(R^2 - h^2) = S.$$

Замечая далее, что объем цилиндра равен $\pi R^2 \cdot R = \pi R^3$, а объем конуса $\pi R^2 \cdot \frac{1}{3} R = \frac{1}{3} \pi R^3$, мы получаем для объема полусферы величину $\frac{2}{3} \pi R^3$, а для объема всей сферы

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

23. Метод исчерпывания. В предложениях книги XII мы встречаемся с античным методом исчерпывания, заменяющим современную теорию пределов.

Евклидова форма метода исчерпывания.

В той форме, которую этот метод имеет в «Началах» Евклида и которая, по всей вероятности, восходит к первым стадиям его развития у Евдокса Книдского, общая схема доказательства такова.

Требуется доказать, что

$$A:B = a:b, \quad (1)$$

где A и B — величины одного рода, а a и b — другого.

Доказательство разделяется на две части.

Если пропорция (1) не имеет места, то возможны следующие два случая: или

$$A:X = a:b, \quad (2)$$

где X — величина того же рода, что A и B , и притом *меньше* B ,

или

$$A:X=a \cdot b, \quad (2')$$

или X уже больше B .

Для исключения первого случая строим ряд величин

$$P_A^{(1)}, P_A^{(2)}, \dots, P_A^{(n)}, \dots,$$

обладающих тем свойством, что:

1) все они меньше A ,

2) разность $A - P_A^{(n)}$ при надлежаще выбранном n может быть в какой угодно мере исчерпана

1-кой же раз строится и для B ,

$$P_B^{(1)}, P_B^{(2)}, \dots, P_B^{(n)}, \dots,$$

и доказывается, что в обоих рядах можно найти элементы $P_A^{(n)}$ и $P_B^{(n)}$, удовлетворяющие пропорции

$$P_A^{(n)} : P_B^{(n)} = a : b. \quad (3)$$

При этом число n можно взять настолько большим, что $P_B^{(n)}$ превзойдет X , которое согласно предположению будет меньше B на какую-то конечную величину, в то время как $P_B^{(n)}$ может приближаться к B неограниченно.

Сравнивая пропорции (2) и (3), получаем:

$$P_A^{(n)} : P_B^{(n)} = A : X,$$

что невозможно, так как $P_A^{(n)}$ меньше A , а $P_B^{(n)}$ больше X .

С совершенно таким же образом, построив два ряда,

$$Q_A^{(1)}, Q_A^{(2)}, \dots, Q_A^{(n)}, \dots$$

и

$$Q_B^{(1)}, Q_B^{(2)}, \dots, Q_B^{(n)}, \dots,$$

таких, что все члены первого ряда больше A , а второго — больше B , но могут быть к ним неограниченно приближены (разности $Q_A^{(n)} - A$ и $Q_B^{(n)} - B$ могут быть в какой угодно мере исчерпаны), мы можем исключить и второй случай.

Метод исчерпывания в «Началах» Евклида применяется для доказательства следующих предложений:

1) Площади кругов относятся, как квадраты их диаметров (предложение 2 книги XII). Здесь A и B — площади кругов, a и b — квадраты их диаметров, $P_A^{(n)}$ — площадь правильного вписанного многоугольника, $Q_A^{(n)}$ — описанного.

Папп отсюда выводит, что окружности относятся, как их диаметры, на том основании, что периметры подобных многоугольников относятся, как диаметры вписанных и описанных кругов.

2) Треугольные пирамиды равной высоты относятся, как основания (предложение 5 книги XII). Здесь A и B — объёмы пирамид, а a и b — площади их оснований, $P_A^{(n)}$ — объём суммы входящих, а $Q_A^{(n)}$ — выходящих призмочек.

3) Конус равен $\frac{1}{3}$ цилиндра, имеющего с ним одну и ту же высоту и основание (предложение 10 книги XII). Здесь A — объём конуса, B — объём цилиндра, $P_A^{(n)}$ и $Q_A^{(n)}$ суть соответственно объёмы вписанной и описанной около конуса пирамид, а $P_B^{(n)}$ и $Q_B^{(n)}$ — объёмы вписанной и описанной около цилиндра призм.

4) Конусы и цилиндры с одной высотой относятся, как основания (предложение 11 книги XII).

5) Подобные конусы и цилиндры находятся в тройном отношении диаметров их оснований (предложение 12 книги XII).

6) Сферы находятся в тройном отношении их диаметров (предложение 18 книги XII).

Тем же методом Архимед доказывает, что площадь эллипса так относится к площади построенного на его большой оси круга, как малая ось к большой.

В учебниках Лежандрова типа, например в «Геометрии» Давидова, эта форма метода исчерпывания применяется для доказательства:

- 1) пропорциональности центральных углов и дуг,
- 2) пропорциональности площадей прямоугольников с равными высотами и их оснований,
- 3) пропорциональности отрезков, отсекаемых прямой на двух параллельных прямых,
- 4) пропорциональности двугранных и линейных углов,
- 5) пропорциональности объёмов параллелепипедов с равновеликими основаниями и их высот.

С привлечением понятия предела евклидова форма метода исчерпывания превращается в следующую схему.

Обе сравниваемые величины A и B заключаются между двумя парами значений переменных величин U, V и S, T так, чтобы

$$U < A < V, \quad S < B < T,$$

причём имеет место пропорция:

$$U:S = u:b.$$

Тогда из равенств

$$U \cap U' = U, \quad U \cap S = U, \quad S \cap S' = S, \quad S \cap T = S$$

следует, что общий предел U и V будет A , а общий предел S и T будет B .

В таком случае пропорция

$$U:S = a:b$$

влечёт за собой равенства

$$\lim U:\lim S = a:b,$$

$$\lim V:\lim T = a:b,$$

откуда следует

$$A:B = a:b.$$

Отсюда легко получается принцип Гурьева:

Если

$$U < A < V,$$

где A — некоторая постоянная, и

$$\lim U = \lim V = C,$$

то

$$A = C.$$

В более общей форме этот принцип может быть формулирован так:

Если

$$U < W < V,$$

где W — некоторая переменная величина, и

$$\lim U = \lim V = C,$$

то и

$$\lim W = C.$$

Таким же образом можно получить теорему, что если отношение двух переменных U и S будет равно $a:b$, то в том же самом отношении будут находиться и их пределы:

$$\lim U:\lim S = a:b.$$

Первая архимедова форма метода исчерпывания

У Архимеда метод исчерпывания подвергается дальнейшей эволюции.

Пусть для заданной величины A построены два ряда приближённых значений

по недостатку:

$$P_A^{(1)}, P_A^{(2)}, \dots, P_A^{(n)}, \dots$$

и по избытку

$$Q_A^{(1)}, Q_A^{(2)}, \dots, Q_A^{(n)}, \dots$$

У Евклида предполагается, что может быть исчерпана разность $A - P_A^{(n)}$, Архимед же предполагает возможность исчерпа-

ния разностей $Q_A^{(m)} - P_A^{(m)}$. Такие же два ряда приближений строятся для другой величины B :

$$R_B^{(1)}, R_B^{(2)}, \dots, R_B^{(m)}, \dots \text{ (по недостатку),}$$

$$S_B^{(1)}, S_B^{(2)}, \dots, S_B^{(m)}, \dots \text{ (по избытку).}$$

Обнаруживается, что для всякого m можно подобрать такое n , чтобы имели место неравенства:

$$P_A^{(m)} \leq R_B^{(n)}, \quad Q_A^{(m)} \geq S_B^{(n)},$$

откуда затем и выводится равенство $A = B$.

По этой схеме Архимед доказывал, что круг равносильен треугольнику с основанием, равным длине окружности, и с высотой, равной радиусу.

В данном случае A есть площадь круга, B — площадь треугольника, $P_A^{(m)}$ и $Q_A^{(m)}$ суть площади вписанного и описанного правильных многоугольников $R_B^{(m)}$ и $S_B^{(m)}$ — площади треугольников с основаниями, равными соответственно периметрам первого и второго многоугольников, и с высотой, равной радиусу.

Тем же способом Архимед в книге «О шаре и цилиндре» определяет боковые поверхности конуса и цилиндра, а также объем шара.

При употреблении терминологии теории пределов этот метод принимает следующий вид.

Если

$$U < A < V, \quad S < B < T$$

и

$$U < S < T < V$$

и из равенства пределов для U и V следует равенство пределов для S и T , то

$$A = B$$

Вторая архимедова форма метода исчерпывания

В этой форме Архимед попрежнему исходит из неравенств

$$P_A^{(m)} \leq A \leq Q_A^{(m)},$$

$$P_A^{(n)} \leq B \leq Q_A^{(n)},$$

но выбирает P и Q так, что они представляются в виде сумм членов $a_j^{(m)}$, убывающих по мере возрастания m :

$$P_A^{(m)} = a_0^{(m)} + a_1^{(m)} + \dots + a_{i-1}^{(m)},$$

$$Q_A^{(m)} = a_1^{(m)} + a_2^{(m)} + \dots + a_{i-1}^{(m)} + a_i^{(m)},$$

так что разность $Q_A^{(m)} - P_A^{(m)}$ может быть сделана сколь угодно малой.

Этот метод Архимед применяет при определении объема коноида (тела, получающегося от вращения параболы около ее оси); в этом случае π представляют объемы цилиндров, входящих и выходящих за поверхность параболоида, а $P_A^{(n)}$ и $Q_A^{(n)}$ — цилиндры, равновеликие суммам этих элементарных цилиндров; что же касается B , то под этим подразумевается объем цилиндра, основание которого есть основание коноида, а высота равна половине высоты коноида. Этот же метод применяется при определении площади архимедовой спирали.

В современной школьной литературе этот метод применяется в так называемой «чертовой лестнице», служащей для доказательства равновеликости двух пирамид с равными высотами и равновеликими основаниями; единственная разница заключается в том, что в современных доказательствах избегается то суммирование, которое для Архимеда было необходимым.

При введении понятия о пределе этот метод приводит к основной идее интегрального исчисления, а именно к представлению величины A в виде предела суммы бесконечно большого числа бесконечно малых элементов.

Третья архимедова форма метода исчерпывания

В третьей форме метода исчерпывания, применяемой Архимедом при определении площади параболического сегмента, искомая величина определяется в результате получаемых суммированием последовательных приближений, все ближе и ближе подходящих к определяемой величине. В идее современной форме этот метод равносильен получению суммы бесконечно убывающего ряда, который в рассматриваемом случае есть не что иное, как бесконечно убывающая геометрическая прогрессия.

КОММЕНТАРИИ К КНИГЕ XIII

1. Другая форма предложения 3. В некоторых манускриптах после предложения 5 следует в качестве 6-го неприводимое, которое в других манускриптах помещено после 6-го. У Гейберга оно дано в прибавлении к IV тому.

Иначе.

Если прямая линия разделена в крайнем и среднем отношении, то будет, что как вместе взятые вся <прямая> и больший отрезок ко всей, так и вся к большему отрезку.

Пусть некоторая прямая AB разделена в крайнем и среднем отношении в C , и пусть большим отрезком будет AC ; я утверждаю, что будет как вместе взятые BA , AC к AB , так и BA к AC (черт. 1).

Действительно, отложим AD равно AC ; я утверждаю, что будет как BD к BA , так и BA к AC . Действительно, поскольку AB разделена в C в крайнем и среднем отношении и больший отрезок есть AC , то, значит, будет, что как BA к AC , так и AC к CB . Но AC равна DA ; значит, будет, что как BA к AD , так и AC к CB ; обратно, значит, будет, что как DA к AB , так и BC к CA ; «присоединяя», значит, будет как DB к BA , так и BA к AC . Но DA равна AC ; значит, будет, что как вместе взятые BA , AC к AB , так и BA к AC . И поскольку доказано, что как DB к BA , так и BA к AC , и CA равна DA , то, значит, будет, что как DB к BA , так и BA к AD . И, значит, DB разделена в A в крайнем и среднем отношении, и большим отрезком будет первоначальная прямая AB , что и требовалось доказать.

Исложенное доказательство интересно в том отношении, что представляет перевод на язык пропорций первоначального доказательства, которое выразилось при помощи площадей.

2. Добавление к первым пяти предложениям книги XIII. В большинстве манускриптов «Начал» за первыми пятью предложениями следует детальный логический разбор их доказательства, который в издании Гейберга помещён в прибавлении к IV тому.

«Что такое анализ и что такое синтез»

Анализ есть взятие искомого как допустимого путём последовательного <вывода, приходящего> к чему-нибудь, признаваемому за истинное.

Синтез же есть взятие допустимого, из которого путём последовательного (вывода получается нечто), признаваемое за истинное.

*Анализ и синтез предложения 1 без чертежа **

Пусть некоторая прямая AB разделена в C в крайнем и среднем отношении, и пусть больший отрезок будет AC ; отложим AD равной половине AB ; я утверждаю, что квадрат на CD будет в пять раз больше квадрата на AD .

Действительно, ес. и квадрат на CD будет в пять раз больше квадрата на DA , квадрат же на CD представляет квадраты на CA , AD вместе с удвоенным прямоугольником между CA , AD , то, значит, квадраты на CA , AD вместе с удвоенным прямоугольником между CA , AD будут в пять раз больше квадрата на AD ; значит, «выделяя», квадрат на CA вместе с удвоенным прямоугольником между CA , AD будет в четыре раза больше квадрата на AD . Но удвоенному прямоугольнику между CA , AD равен прямоугольник между BA , AC (ибо BA в два



Черт. 2.

раза больше AD , квадрату же на AC равен прямоугольник между AB , BC (ибо AB разделена в крайнем и среднем отношении; значит, прямоугольник между BA , AC вместе с прямоугольником между AB , BC будут в четыре раза больше квадрата на AD . Но прямоугольник между BA , AC вместе с прямоугольником между AB , BC представляют квадрат на AB . Значит, квадрат на AB будет в четыре раза больше квадрата на AD . Но он и есть, ибо AB есть удвоенная AD .

Синтез

Теперь, поскольку квадрат на AB в четыре раза больше квадрата на AD , но квадрат на BA есть, прямоугольник между BA , AC вместе с прямоугольником между AB , BC , то, значит, прямоугольник между BA , AC вместе с прямоугольником между AB , BC будут в четыре раза больше квадрата на AD . Но прямоугольник между BA , AC равен удвоенному прямоугольнику между DA , AC , прямоугольник же между AB , BC равен квадрату на AC ; значит, квадрат на AC вместе с дважды прямоугольником между DA , AC будет в четыре раза больше квадрата на AD ; так что квадраты на DA , AC вместе с дважды прямоугольником между DA , AC будут в пять раз больше квадрата на DA . Квадраты же на DA , AC вместе с дважды прямоугольником между DA , AC суть квадрат на CD . Значит, квадрат на CD в пять раз больше квадрата на DA , что и требовалось доказать.

* В действительности вывод сопровождается очень простым чертежом (см. черт. 2).

Анализ и синтез предложения 2 без чертежа

Пусть прямая CD будет в квадратах в пять раз больше своего отрезка DA ; положим, что удвоенная DA будет AB ; я утверждаю, что AB разделена в крайнем и среднем отношении в точке C и большим отрезком будет AC , которая представляет остаток первоначальной прямой (черт. 3).

Если AB разделена в крайнем и среднем отношении в C и больший отрезок будет AC , то, значит, прямоугольник между AB , BC будет равен квадрату на AC . Но прямоугольник между BA ,



Черт. 3.

AC равен также удвоенному прямоугольнику между DA , AC (ибо BA в два раза больше AD); значит, прямоугольник между AB , BC вместе с прямоугольником между BA , AC , что представляет квадрат на AB , будут равны дважды прямоугольнику между DA , AC вместе с квадратом на AC . Но квадрат на AB в четыре раза больше квадрата на DA ; значит, и дважды прямоугольник между DA , AC вместе с квадратом на AC будут в четыре раза больше квадрата на AD ; так что и квадраты на DA , AC вместе с дважды прямоугольником между DA , AC , что представляет квадрат на CD , будут в пять раз больше квадрата на DA . Но так и есть.

Синтез

Теперь, поскольку квадрат на CD в пять раз больше квадрата на DA , квадрат же на CD представляет квадраты на DA , AC вместе с дважды прямоугольником между DA , AC , то, значит, квадраты на DA , AC вместе с дважды прямоугольником между DA , AC будут в пять раз больше квадрата на DA . Выделяя, дважды прямоугольник между DA , AC вместе с квадратом на AC будут в четыре раза больше квадрата на AD ; но также и квадрат на AB в четыре раза больше квадрата на AD ; значит, дважды прямоугольником между DA , AC , который представляет один раз вытнятый прямоугольник между BA , AC , вместе с квадратом на AC будут равны квадрату на AB . Но квадрат на AB есть прямоугольник между AB , BC вместе с прямоугольником между BA , AC ; значит, прямоугольник между BA , AC вместе с прямоугольником между AB , BC будут равны прямоугольнику между BA , AC вместе с квадратом на AC ; и, значит, после отнятия общего прямоугольника между BA , AC остающийся прямоугольник между AB , BC будет равен квадрату на AC ; значит, будет как BA к AC , так AC к CB . Но BA больше AC ; значит, и AC больше CB ; значит, AB разделена в C в крайнем и среднем отношении, и большим отрезком будет AC , что и требовалось доказать.

Анализ и синтез предложения 3

Пусть прямая AB разделена в точке C в крайнем и среднем отношении и AC будет большим отрезком, а CD — половиной AC ; я утверждаю, что квадрат на BD будет в пять раз больше квадрата на CD (черт. 4).

Действительно, если квадрат на BD в пять раз больше квадрата на CD , квадрат же на DB есть прямоугольник между AB , BC вместе с квадратом на DC , то, значит, прямоугольник между AB , BC вместе с квадратом на DC будут в пять раз больше квадрата на DC ; значит, «выделяя», прямоугольник между AB , BC будет



Черт. 4.

в четыре раза больше квадрата на DC . Прямоугольнику же между AB , BC равен квадрат на AC , ибо AB разделена в C в крайнем и среднем отношении. Значит, квадрат на AC будет в четыре раза больше квадрата на DC . Но так и есть, ибо AC есть удвоенная DC .

Синтез

Поскольку AC есть удвоенная DC , то квадрат на AC в четыре раза больше квадрата на DC . Но квадрату на AC равен прямоугольник между AB , BC ; значит, прямоугольник между AB , BC будет в четыре раза больше квадрата на DC . Значит, присоединяя, прямоугольник между AB , BC вместе с квадратом на DC , что составляет квадрат на DB , будут в пять раз больше квадрата на DC , что и требовалось доказать.

Анализ и синтез предложения 4

Пусть прямая линия AB разделена в C в крайнем и среднем отношении, и пусть больший отрезок будет AC , я утверждаю, что квадраты на AB , BC будут в три раза больше квадрата на AC (черт. 5).

Действительно, если квадраты на AB , BC в три раза больше квадрата на AC , то квадраты на AB , BC представляют дважды прямоугольник между AB , BC с квадратом на AC (предложение 7 книги II, то, значит, дважды прямоугольник между AB , BC вместе с квадратом на AC в три раза больше квадрата на AC ; значит, «выделяя», дважды прямоугольник между AB , BC будет в два раза больше квадрата на AC , т.е. что прямоугольник между AB , BC равен квадрату на AC . Но так и есть, ибо AB разделена в C в крайнем и среднем отношении.



Черт. 5.

Синтез

Поскольку AB рассечена в C в крайнем и среднем отношении и наибольший отрезок есть AC , то, значит, прямоугольник между AB , BC равен квадрату на AC ; значит, дважды прямоуголь-

ник между AB , BC будет вдвое больше квадрата на AC ; значит, присоединяя, дважды прямоугольник между AB , BC вместе с квадратом на AC будет втрое больше квадрата на AC . Но дважды прямоугольник между AB , BC вместе с квадратом на AC представляет квадраты на AB , BC (предложение 7 книги II); значит, квадраты на AB , BC втрое больше квадрата на AC , что и требовалось доказать.

Анализ и синтез предложения 5

Пусть некоторая прямая AB будет разделена в C в крайнем и среднем отношении, и пусть наибольший отрезок будет AC ; отложим AD равной AC ; я утверждаю, что DB разделена в A в крайнем и среднем отношении и наибольший отрезок есть AB (черт. 6).

Действительно, если DB разделена в A в крайнем и среднем отношении и AB наибольший отрезок, то, значит, будет, что как DB к BA , так и BA к AD . Но AD равна AC ; значит, будет, что как DB к BA , так и BA к AC ; значит, перевернувшись (предложение 19 книги V, следствие), — как BD к DA , так и AB к BC ; значит, «выделяя» (предложение 17 книги VI), — как BA к AD , так и AC к CB . Но AD равна AC ; значит, будет как BA к AC , так и AC к CB . Но так и есть; ибо AB разделена в C в крайнем и среднем отношении.



Синтез

Поскольку AB разделена в C в крайнем и среднем отношении, то, значит, будет как BA к AC , так и AC к CB . Но AC равна AD ; значит, будет как BA к AD , так и AC к CB ; значит, присоединяя (предложение 18 книги VI), — как BD к DA , так и AB к BC , значит, перевернувшись (предложение 19 книги V, следствие), — как DB к BA , так и BA к AC . Но AC равна AD ; значит, будет как DB к BA , так и BA к AD . Итак, DB разделена в A в крайнем и среднем отношении и наибольший отрезок есть AB , что и требовалось доказать.

К этим пяти предложениям нужно сделать несколько замечаний.

То, что эти предложения представляют позднейшую интерполяцию, не может вызывать никаких сомнений, но во всяком случае это очень ранняя интерполяция, появившаяся еще до теонической релаксации «Начал». Гейберг высказал предположение, что эти пять теорем представляют остаток ранних аналитических исследований Евдокса или Тейтета, вкрадшийся в основной текст с целью какой-нибудь копии «Начал».

Относительно характера этих предложений нужно, во-первых, отметить их крайнюю алгебраичность; по существу их адекватный

перевод мы получили бы, если бы выбросили все эти «квадраты на и «прямоугольники между», а писали бы просто: AB^2 и $AB \cdot BC$.

Во вторых, очень интересно употребление в их тексте терминов «присоединяю» (*συνέβη*) и «выделяю» (*ἀνέβη*), равносильных нашим производным пропорциям со сложением или вычитанием. Только в тексте предложения 5 они употребляются в том же самом смысле, что и в основном тексте Евклида, в других же местах они употребляются в смысле нашего «прибавим (или вычтем) порознь к обеим частям равенства». Такой не вполне установившийся смысл термина характерен или для ранней поры, когда термин только-только входит в употребление, или, наоборот, для очень поздней, характеризующей известным разложением строгости терминологии. Так как эти предложения вошли в текст Евклида сравнительно рано, то, может быть, правильным является предположение Гейберга о принадлежности их Евдоксу или Теэтету (вероятнее, конечно, последнему, ибо термины «анализ» и «синтез» определенно указывают на школу Платона). Кстати, греческий текст, определенный анализ и синтеза явно испорчен (в особенности определение синтеза); чтобы восстановить смысл, пришлось сделать несколько вставок в определение анализа; восстанавливать же точный текст определения синтеза представляется явно безнадежное дело (II, B₁).

3. Синтез и анализ в античном понимании. Смысл термина *анализ* подвергался с течением времени существенной эволюции.

Бесспорно, что раньше его понимали в том смысле, который он имеет в выражениях «Анализ бесконечно малых», «Химический анализ», т. е. в смысле изучения целого с помощью разложения на части или на элементы.

Ему противопоставлялся *синтез*, как подучение целого путем соединения элементов. В этом смысле понятие синтеза встречается и у Аристотеля.

Это — два приема изыскания истин и соответствующих им типов изложения; в то время как анализ исходит от следствий к причинам, синтез идет в обратном направлении — от причин к следствиям.

Но у Евклида понимание анализа и синтеза *другое*: это *приём второй* доказательства, различающийся более по *форме*, чем по *сущности*.

Его определение: «Предположение доказывается *аналитически*, если искомое принимается за известное и на основании выведенных отсюда следствий получается известная истина; наоборот, оно доказывается *синтетически*, если с помощью известных истин доходим до искомого».

Но это определение порождает большие недоразумения. Ещё Аристотель заметил, что из ложного положения можно вывести истинные положения. Отсюда должно было бы следовать, что анализ Евклида — приём неправильный. Однако неудачной у Евклида является только *формулировка*, сама же сущность евклидовых приёмов хорошо разъясняется примерами из его «Начала».

В анализе от тождества $A=0$ он идёт к ему эквивалентному $B=0$, которое в свою очередь заменяется эквивалентным $C=0$ и так далее, пока не приходит к $D=0$, эквивалентному каждому из предыдущих и верному уже на основании ранее доказанного.

В синтезе та же цепь тождеств развёртывается в обратном порядке, начиная с $D=0$ и кончая $A=0$. Но суждение-причина и суждение-следствие у самого Евклида являются всегда эквивалентными.

Приём Евклида можно иллюстрировать примером из современной алгебры:

Уравнение вида $A=0$, а именно

$$\{x^2 + (y-1)^2\}^2 + \{x^3 + x^2\}^2 + \{x+2y-2\}^2 = 0$$

эквивалентно (при x, y вещественных) следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} x^2 + (y-1)^2 &= 0, \\ (x^3 + x^2)^2 + (x+2y-2)^2 &= 0, \end{aligned}$$

Обозначив левые части этих уравнений через B_1 и B_2 , мы можем от $B_1=0, B_2=0$ перейти к системе вида

$$C_1=0, C_2=0, C_3=0, C_4=0,$$

т. е. в настоящем случае к

$$x=0, y-1=0, x^3+x^2=0, x+2y-2=0,$$

а затем к $x=0, y=1$, идя по следующей схеме (черт. 7).

Отметим, что при таком понимании анализа он выступает как изучение *целого путём разложения его на части, противоположностью которому является синтез, сводящий части воедино*. Говоря $A=0$, мы говорим то же, что говоря $B=0, B_2=0$, так что первое суждение (A) *заключает в себе суждения (B_1) и (B_2) или складывается из (B_1) и (B_2)* и при этом только из (B_1) и (B_2). Переход от (A) к (B_1), (B_2) является своего рода разложением.

В предложении 1 книги XIII раскрывается смысл понятий анализа и синтеза у Евклида.

Если прямую AB в точке C разделить в крайнем и среднем отношении, то квадрат, построенный на прямой AD , составляющей половину данной, и большем отрезке AC , равен пяти раз взятому квадрату, построенному на этой половине.

В современной символике это выглядит так.

Дано

$$(a-v)a = x^2,$$



Черт. 7.

требуется доказать, что

$$\left(\frac{a}{2} - x\right)^2 = 5 \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

Аналитическое доказательство:

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{2} + x\right)^2 &= 5 \left(\frac{a}{2}\right)^2, \\ x^2 + 2x \frac{a}{2} + \left(\frac{a}{2}\right)^2 &= 5 \left(\frac{a}{2}\right)^2, \\ x^2 + ax &= 4 \left(\frac{a}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Последнее же равенство удовлетворяется, если

$$x^2 = a(a - x),$$

ибо

$$a(a - x) - ax = 4 \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

или

$$a^2 - 4 \left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

что приводится к тождеству

$$a^2 = a^2.$$

Синтетическое доказательство состоит в том, что предыдущее тождество обратным процессом преобразуют в ему эквивалентные пока не доходят до '2'.

О синтезе и анализе Паппи в своих «Математических собраниях»¹⁾ говорит следующее:

«Анализ — это метод, в котором искомое предполагают как данное и извлекают следствия, относящиеся к чему-либо данному, которое ведёт к синтезу.

При решении рассматривается искомое, как уже найденное, и исследуется, из чего оно прежде всего следует. Затем из чего это последнее следует и так далее, пока при этом продвижении назад не получится то же, что дано или может быть положено в основание.

При синтезе в конце оперируют с тем, что при анализе прежде всего получается, и в естественном порядке заставляют следовать то, что из него вытекает, пока не достигают искомого. Это называется синтезом. Но при этом анализ двоякого рода: *теоретический*, ищущий правильность предложений, в *проблематический*, ищущий решение задач.

¹⁾ Введение к седьмой книге «Collectiones mathematicae», изд. Heitsch, vol. II, 1875.

В *теоретическом* анализе полагают истинным предложение, которое исследуют, и выводят из него следствия, пока не дойдут до истинного или ложного предложения. Если верно первое, то верно и высказанное предложение и доказательство идет в обратном порядке анализа. Если неверно, то то же относится и к исходному предложению.

В *проблематиче*ском анализе искомое принимается, как известное, и приходит согласно тому, что правильно следует из другого, к чему-то известному. Если это есть нечто возможное, что можно представить тем, что математики называют данным, то предложенная задача может разрешиться, и доказательство идет по пути, обратному анализу. Если приходит к чему-либо явно невозможному, то задача невозможна.

Дюрисм — это определение того, можно ли, и если можно, то как и сколькими способами получить достаточное для решения какой-либо задачи.

Неправильно было бы понимать анализ Паппа, как восхождение к причинам так, как это теперь понимается. Это уже видно из разъяснения Паппа, относящегося к *теоретическому* анализу. Доказательство приведенное к абсурду, идущее от *причин* к *следствиям*, по мнению Паппа есть анализ, так как идет от недоказанного предложения, предполагая его верным. Прямое же доказательство по схеме теоретического анализа Паппа мог понимать только в евклидовом смысле. В сущности, как следует из примеров, приводимых Паппом для пояснения этих определений, различие у него сводится к тому, что при синтезе неизвестное определяется рядом операций над *известными* элементами, при анализе же обнаруживается, что результат операций над *неизвестными* элементами и *известными* представляет известное и уже отсюда определяется.

Папп видит аналитический метод в «Данных» и «Поризмах» Евклида, в «Сечениях», «Касаниях» и «Кониках» Аполлония, в трудах Эратосфена. Примеры анализа (решения с помощью составленных уравнения и его решения) находим у Архимеда.

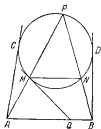
Во второй книге «О шаре и цилиндре», главным образом в задаче 3 и в предложении 3, Архимед приравнивает различные друг с другом, не различая, даны ли они или неизвестны, и приходит, приравняв предложения, которые основываются на свойствах сферы и конуса, к пропорции, которая, перефразируя на алгебраический язык, должна непосредственно дать уравнение третьей степени, от которого зависит решение задачи. При таком понимании термина «аналитический» всякая *алгебраическая* геометрия может быть названа *аналитической*.

4. Аналитическое и синтетическое изложение доказательства. Рассмотрим аналитическое и синтетическое решения задачи Паппа ¹⁾.

¹⁾ Kluge I, Mathematisches Wörterbuch.

Даны по величине и положению круг PMV и отрезок прямой AB (черт. 8).

Требуется найти на окружности круга точку P такую, чтобы точки пересечения M и N линий AP и BP с окружностью лежали на прямой MV , параллельной AB .



Черт. 8.

A и Q в обоих треугольниках общий. Отсюда

$$AB:AP = AM:AQ$$

или

$$AB \cdot AQ = AP \cdot AM.$$

Стоящее в правой части произведение $AP \cdot AM$ будет равно квадрату касательной AC , проведенной из точки A к окружности MPN :

$$AB \cdot AQ = AC^2,$$

что вполне определяет

$$AQ = \frac{AC^2}{AB},$$

которая таким образом может быть построена.

Синтетическое изложение решения

Проводим касательную BD к окружности. Тогда

$$BP:BD = BD:BN,$$

откуда

$$BP:BN = BP^2:BD^2.$$

Точно так же получаем

$$AP:AM = AP^2:AC^2.$$

Вследствие параллельности MN и AB

$$AP:AM = BP:BN,$$

поэтому

$$AP^2:AC^2 = BP^2:BD^2$$

■

$$AP:AC = BP:BD.$$

Отсюда следует, что надо строить треугольник APB , стороны которого AP и BP находятся в данном отношении, а вершина P лежит на данной окружности. Точка P получается, как пересечение последней с окружностью, являющейся геометрическим местом точек с данным отношением расстояний от двух точек A и B .

5. Евклид и Геродот. Геродот, описывая во второй книге своих «Историй» Египет и пирамиды, характеризует пирамиду Хеопса следующей несколько загадочной фразой (II, 124):

τῆς	ἐστὶ	πανταχῇ	μετὰ	ἐκαστῶν
У нее (т. е. у пирамиды)	есть	повсюду	метоп	каждый
ὅστις	δοῦναι		τετραγώνου	κἂν
посемь	плегров,	являющейся	квадратной,	и
ὅσοις	τοῦ			
высота	равная.			

При взгляде на эту фразу бросается в глаза неловкость постановки слов *δοῦναι τετραγώνου*, которые согласованы с *τῆς* (у нее, являющейся квадратной); слишком далеко они отстоят от определяемого слова. В своем переводе Геродота Ф. Г. Мищенко просто выбросил эти слова, считая, очевидно, что место испорченным и передал рассматриваемый текст так:

Каждая из четырех сторон её имеет восемьсот футов длины и столько же высоты...

В латинском переводе, сопровождающем издание Didot, это место читается так:

«Форма её квадратна; каждая сторона измеряется восемьюстами футов; высота тех же размеров».

Против таких переводов можно сделать следующие возражения:

1) Греческое слово *μετὰ* (буквально — что находится *между* глазами) — *δοῦναι*, передняя часть — не может пониматься как «сторона». В архитектуре метопами назывались промежутки между триглицфами, украшенными скульптурными композициями. Это слово определённ надо понимать в смысле «грань», как, полагаямому, и делает Мищенко.

2) Греческая мера «плетр» употребляется в двух смыслах. С одной стороны, это мера длины, равняющаяся 100 единицам (большой частью футам); с другой, — это мера площади, равняющаяся 100×100 квадратных единиц (большой частью кв. футов).

Кроме этих возражений филологического характера можно сделать следующие замечания уже по существу:

3) Длина стороны Хеопсовой пирамиды равняется 440 царских локтей по 29 дюймов. Считая, что фут равняется 12 дюймам, мы при переводе её длины в пелтры получаем:

$$\frac{440 \times 29}{12} = 10,3 \text{ пелтра,}$$

т. е. около 25% ошибки.

4) Высота пирамиды равна 280 царских локтей, апофема боковой грани — приблизительно 356 царских локтей; ни та ни другая не могут равняться стороне основания.

Можно удовлетворить всем этим возражениям, если понимать *ἀπόφες* именно как «трапеция». Площадь этой грани будет равняться $356 \times 220 = 78\,760$ кв. локтей, что очень мало отличается от 80 000, т. е. от восьми пелетров. С другой стороны, квадрат высоты будет $280 \times 280 = 78\,400$, что тоже очень близко подходит к величине площади боковой грани, так что нам уже не придётся искать дополнения к слову «равная» для высоты. Недостаточный же для такого перевода «квадрат» мы легко можем получить из отброшенных в переводе Мищенко слов *ἰσότης τετραγώνου*, которые явно стоят не на своём месте. Таким образом, если мы хотим реконструировать это место так, чтобы оно удовлетворяло и грамматике и действительности, то мы должны читать его примерно так:

τὴν ἰσὴν πεντήκοντα ἑξαπύλων ὀρθὴν
 πλάτην τὴν τετραγώνου ἰσὴν ὀφίος ὄψεσιν.

что в переводе будет соответствовать следующему:

«У неё повсюду каждая грань составляет восемь пелетров и равна квадрату на высотах».

Это место Геродота представляет большой интерес и само по себе. Так как время путешествия Геродота определяется 455—447 годами до н. э. (см. С. Я. Лурье, Геродот, М.—Л., 1947, стр. 13), то, во-первых, мы имеем точно датированное и притом самое раннее документальное свидетельство, касающееся истории греческой математики в связи последней с Египтом. Во-вторых, мы имеем доказательство, что египтяне эпохи Геродота умели квадрировать площади прямоугольных фигур и что греки (одни из них — Геродот) получали соответствующие познания из Египта. В-третьих, если рассмотреть треугольник, гипотенузой которого является апофема боковой грани, вертикальным катетом — высота пирамиды, а горизонтальным — половина стороны основания, то легко видеть, что апофема так относится к высоте, как высота к половине длины основания, а в этом, между прочим, лежит зародыш принципа золотого сечения, или деления в крайнем и среднем отношении, которое

также должно было быть известно египтянам около 450 г. до н. э.¹⁾

Теперь посмотрим, какое место занимает золотое сечение в «Началах» Евклида. Прежде всего нужно отметить, что оно встречается в двух формах, разница между которыми почти неощутима для нас, но была очень существенной в глазах греческого математика V—IV веков до н. э. Первая форма, прототип которой мы видели в Египте, является в книге II «Начал», а именно в предложении II вместе с вводящими его предложениями 5 и 6; здесь золотое сечение определяется как такое, в котором квадрат, построенный на большем отрезке, равняется прямоугольнику на всей прямой и меньшем отрезке. Вторую форму мы имеем в определении 3 книги VI, где золотое сечение определяется пропорцией как вся прямая к большему отрезку, так и больший отрезок к меньшему — и называется делением в крайнем и среднем отношении; в этой форме золотое сечение могло быть известным только со времен Евдокса. Интересно отметить, что предложения 5, 6 и II книги II соответствуют предложениям 27, 28 и 30 — шестой. Затем, предложения 5 и 6 книги II разорвали связь между предложениями 4 и 7, соответствующими нашим формулам квадратов суммы и разности; «та же фигура», о которой упоминается в предложении 7, строится в 4-м.

В книге XIII золотое сечение является в обеих указанных формах, а именно в первой форме в предложениях 1—5 и во второй — в предложениях 8—10. Правда, в формулировке и в тексте доказательства 1—5 предложений встречаются слова «в крайнем и среднем отношении», в доказательствах есть некоторые следы пользования пропорциями, но при внимательном чтении нетрудно заметить, что все эти места не связаны органически с общим текстом и легко из него могут быть исключены; всё доказательство по существу ведется, исходя из равенства квадрата на большем отрезке прямоугольнику на всей прямой и меньшем отрезке.

Затем в этих пяти предложениях в самом начале доказательства мы встречаем интересную формулу: « $\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta\eta\theta\iota$... $\eta\theta\iota\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta$... $\kappa\lambda\mu\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta\eta\theta\iota$ $\tau\theta\iota\alpha\beta\gamma\delta$ ». Это та же самая формула, которая встречается в предложениях 7 и 8 книги II; и эту «обычную фигуру» ($\tau\theta\iota\alpha\beta\gamma\delta$ — с членом $\tau\theta\iota$) приходится искать

¹⁾ Говоря это, я никоим образом не хочу утверждать, как это делают некоторые буржуазные «пирамидологи», что Хеопсова пирамида была построена по принципу золотого сечения. Если рассматривать все пирамиды в совокупности (и не только одну пирамиду Хеопса), то открыть принцип их построения не так уже трудно, но он не будет иметь ничего общего с золотым сечением. Следует различать, что видели в пирамидах египетские зодчие Древнего Царства, и как их понимали египтяне 1-го времени Геродота.

из очень дальком расстоянии от начала книги XIII. Это совсем непохоже на Евклида, который всегда подробно описывает нужное для доказательства построение; исключение делается лишь в сравнительно редких случаях, когда построение несколько сложно и только что описано в предыдущей теореме; тогда Евклид говорит: *κατασκευάζει τὰ αὐτὰ* — приготавливаем то же самое. Это сразу же наводит на мысль, что рассматриваемые пять предложений первоначально составляли одно целое с предложениями 4, 7 и 8 книги II и были механически с небольшими поправками перенесены Евклидом в книгу XIII. Это впечатление ещё более укрепляется тем обстоятельством, что, как заметили уже многие комментаторы, начиная с Коммандино, при доказательстве указанных предложений вторая книга игнорируется полностью, а при её использовании доказательство могло бы быть произведено значительно проще (см. ниже комментарий 7). Более того, предложение 2 книги XIII по существу равнозначит геометрическому построению предложения II книги II.

Всё это позволяет думать, что предложения 4, 7, 8 книги II и предложения 1—5 книги XIII представляют остатки одного из самых древних в истории греческой геометрии документов, восходящего по всей вероятности к первой половине V века и возникшего в пифагорейской школе на основании того материала, который был привезён из Египта. Сравнительную древность этого документа можно установить из того обстоятельства, что предложения 4 и 7 книги II служат в ней для доказательства обобщённой теоремы Пифагора (квадрат стороны против острого и тупого угла предложения 12 и 13 книги II), которая, несомненно, была известна Гипократу Хиосскому (она, — вернее, обратная ей теорема — применяется в его доказательстве квадратуры луночек).

Возможно, что в состав этого же документа входили и предложения 27 и 28 книги VI, где тоже встречается терминология *κατασκευάζει τὰ αὐτὰ*, но только не в том виде, какой они имеют в настоящее время (использование теории подобия и пропорций); эти предложения могли быть изъяты из текста рассматриваемого документа и заменены в нём более частными предложениями 5 и 6 книги II, которые Евклид вставил между предложениями 4 и 7 этой же книги. Что касается предложений 1—5 книги XIII, то они, вероятно, занимали место предложения II книги II, с которым по существу совпадает предложение 2 книги XIII (И. В.).

6. Книги II и XIII Евклида. Несмотря на то, что первые пять предложений книги XIII составляют одно целое с рядом предложений книги II, нужно отметить, что при непосредственном использовании предложений книги II (в особенности предложения II, которое и даёт построение золотого сечения) доказательства были бы в отдельных случаях значительно проще.

Построение предложения II книги II заключается в следующем: на прямой AB , которую надо делить в крайнем и среднем

отношении, строим квадрат $ABCD$ (черт. 9), делим AC пополам в E , соединяем BE и откладываем $EI = EB$; на AI строим квадрат $AIHG$, точка G и будет делить AB в крайнем и среднем отношении.

В свете этого построения доказательство *первой теоремы* книги XIII выглядело бы так. Прямая IA есть больший отрезок золотого сечения, а AE — половина деловой прямой. Требуется доказать, что $IE^2 = 5AE^2$. Имеем:

$$IE^2 = EB^2 = AB^2 + AE^2 = 5AE^2.$$

Вторая теорема будет читаться так: если EI разделена в A так, что $EP^2 = 5AE^2$, и $AE = EC$, то AI будет большим отрезком прямой AB , разделённой в крайнем и среднем отношении. Имеем:

$$\begin{aligned} EP^2 &= 5AE^2 = (2AE)^2 + AE^2 = \\ &= AB^2 + AE^2 = BE^2, \end{aligned}$$

откуда $EI = EB$. Тогда, согласно построению предложения II книги II, $AI = AG$ будет большим отрезком при делении в крайнем и среднем отношении прямой AB , которая будет равна $AC = 2AE$.

Для доказательства *третьей теоремы* мы могли бы рассуждать так. Пусть прямая AB разделена в G в крайнем и среднем отношении, и больший отрезок есть AG ; тогда

$$AG^2 = AB \cdot BG,$$

что можно переписать в виде

$$AP^2 = AC \cdot BG.$$

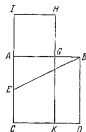
Прибавляем к обеим частям по $AC \cdot AE$:

$$\begin{aligned} AC \cdot AI + AP^2 &= AC \cdot AI + AC \cdot BG, \\ CI \cdot AI &= AC^2. \end{aligned}$$

Это значит, что прямая CI разделена в A в крайнем и среднем отношении, причём AC есть наибольший отрезок. Но тогда, согласно первой теореме,

$$IE = 5AE^2, \text{ т. е. } \left(IA + \frac{AC}{2}\right)^2 = 5 \left(\frac{AC}{2}\right)^2,$$

а это значит, что квадрат на меньшем отрезке IA , сложенный с половиной большего отрезка AC , будет равняться удвоенной половине большего отрезка в квадрате, что и требовалось доказать.



Черт. 9.

Четвертая теорема требует, чтобы сумма квадратов всей прямой и меньшего отрезка равнялась утроенному квадрату на большем отрезке.

На основании предложения 7 книги II имеем:

$$AB^2 + BG^2 = 2AB \cdot BG + AG^2,$$

но по свойству золотого сечения

$$AB \cdot BG = AG^2,$$

откуда и вытекает правильность нашей теоремы.

Наконец, правильность *пятой теоремы* непосредственно вытекает из рассмотрения чертежа 9 повторяющего соответствующий чертеж предложения II книги II. На нем прямые AB и CI разделены в крайнем и среднем отношении соответственно в точках Q и A ; в последнем делении прямая $AB = AC$ является большим отрезком, а больший отрезок $AG = AI$ обращается в меньший отрезок при делении прямой CI .

Из предыдущего можно сделать тот вывод, что автору предложений 1—5 книги XIII не было известно построение предложения II книги II, а также, по всей вероятности, предложений 5 и 6 книги II, являющихся его необходимой предпосылкой (*И. В.*).

7. Предложения 6—12 книги XIII. Эти предложения, занимающие среднюю часть рассматриваемой книги, являясь по существу планиметрическими, служат подготовкой для предложений 13—18, являющихся венцом как книги XIII, так и всего сочинения Евклида.

Первое из них — шестое предложение — устанавливает связь между золотым сечением и тестетовыми иррациональностями книги X (Начал.. Подлинность этого предложения является весьма сомнительной. Оно нужно при доказательстве предложения 17 и в самом важном Ватиканском манускрипте, являющемся основным для установления подлинного текста Евклида, сопровождается на полях такой попиской:



Черт. 10.

Этой теореме не имеется в большей части новых изданий, в более же старых её можно отыскать.

Это замечание позволяет думать, что в новых, по всей вероятности, теоретических изданиях эта теорема была исключена, как сомнительная.

Даже в том же самом Ватиканском манускрипте есть сходия к предложению 17, которое воспроизведена Гейбергом в приложениях к IV тому его издания «Начал» (стр. 376).

Действительно, пусть рациональная (прямая) AB будет разделена в C в крайнем и среднем отношении, и пусть больший (отрезок) будет AC . Приложим же AD — половину AB (черт. 10). Рациональной, значит, (будет) и AD . И поскольку (квадрат) на CD в пять раз больше (квадрата) на DA (предложение 1 кни-

ги XIII), то, значит, CD , DA будут рациональными, соизмеримыми только в степени. Значит, AC «будет» вычетом. Но AB рациональна. («Квадрат» же на вычете, прилагаемый к рациональной, образует в качестве ширины вычет (предложение 97 книги X), значит, BC будет вычетом. Значит, каждая из AC , CB есть вычет; сочетающаяся же с AC есть AD , с CB же — CD ».

Помещение этой схолии, по мнению Гейббарга, было бы совершенно излишним, если бы предложение 6 уже существовало.

Далее следует отметить положение предложения 6. В Ватиканском манускрипте оно стоит между нашим предложением 5 и помещенным в комментарий 1 «другим доказательством» пятого предложения, таким образом предложение 6 появилось подчас этого «другого доказательства», которое, как и все другие доказательства, уже было неподлинным. Далее, в Болонском манускрипте это предложение в сильно искаженной форме помещается между книгами XII и XIII, представляя нечто вроде введения к первым пяти предложениям книги XIII.

Следующие шесть предложений касаются правильных многоугольников и по существу равнозначны нашим формулам для сторон правильных пятиугольника, квадрата и треугольника, только порядок у Евклида в книге XIII являлся обратным и нашему и тому, который установлен в книге IV. В последний по очереди рассматриваются треугольник, квадрат и пятиугольник; в тринадцатой же книге Евклид начинает с пятиугольника, пропускает квадрат, как, вероятно, уже общенестный, и заканчивает треугольником (предложение 12, выводящее известную формулу $a_3 = r\sqrt{3}$ приблизительно так же, как это делаем и мы). Что касается предложений 7—11, то все они говорят о пятиугольнике. И выдвигение пятиугольника на первый план, и самая форма доказательств предложений 8—11 — очевидно последние доказательства — ясно показывают, что эти предложения представляют нечто новое и вряд ли могут принадлежать Пифагору, которому иногда приписывается установление пентаграммы (звездчатого пятиугольника) в качестве символа пифагорейского союза.

Из этих предложений 7 и 8 доказываются очень просто. Стоит отметить, что хотя в предложении 8 считается возможным вписать пятиугольник в круг (предложение 14 книги VI), но само построение не описывается; более того, основное свойство, на котором оно основано — построение равнобедренного треугольника, в котором углы при основании (72°) вдвое больше угла при вершине (36°), — нигде не используется.

В предложении 9 впервые у Евклида появляется правильный десятиугольник, который в современной геометрии почти полностью вытеснил пятиугольник. Соответствующее доказательство в современной формулировке мы воспринимали бы так:

Поскольку BC сторона правильного десятиугольника (черт. 11), то угол $CEB = 36^\circ$, а углы EBC и ECB равны каждый 72° . Далее, угол ECB является внешним по отношению к равнобедренному треугольнику ECD , в котором EC радиус, а CD — сторона

шестиугольника; значит, каждый из углов CED и FDC будет по 36° . Но тогда угол BED , равный сумме углов BEC и CED , будет 72° и треугольник BDE будет подобен треугольнику IBC . Отсюда

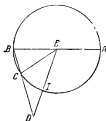
$$\frac{CD+BC}{BE} = \frac{BE}{BC},$$

т. е. прямая BD разделена в C в крайнем и среднем отношении, причём большим отрезком служит сторона шестиугольника CD , а меньшим — сторона десятиугольника BC . Отсюда легко определяется сторона десятиугольника:

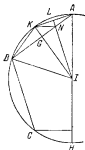
$$a_{10} = \frac{r}{r + a_6},$$

$$a_{10}^2 + ra_{10} = r^2,$$

$$a_{10} = -\frac{r}{2} + \sqrt{\frac{r^2}{4} + r^2} = r \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$



Черт. 11.



Черт. 12.

Десятое предложение позволяет нам получить алгебраическое выражение для стороны десятиугольника. Это предложение, по мнению некоторых авторов принадлежащее Евдоксу, гласит, что квадрат стороны правильного пятиугольника равен сумме квадратов сторон правильных шестиугольника и десятиугольника.

В современной форме доказательство шло бы так (черт. 12).

Пусть AB — сторона пятиугольника, $AK = KB$ — сторона десятиугольника, INL — биссектриса угла AIK . Тогда угол $AIB = 72^\circ$, углы ABI и BAI по 54° , угол $BIN = 36^\circ + 18^\circ = 54^\circ$ и треугольник IBN будет равнобедренным и подобным ABI , что даёт нам:

$$\frac{AB}{BI} = \frac{BI}{BN}.$$

Далее, из подобия равнобедренных треугольников ABK и AKN будем иметь:

$$\frac{AB}{AK} = \frac{AK}{AN}.$$

Из этих равенств определяем AN и BN :

$$AN = \frac{AK^2}{AB}, \quad BN = \frac{BP^2}{AB}.$$

что после сложения дает:

$$(AN + BN)AB = AK^2 + BP$$

или

$$a_5^2 = a_{10}^2 + a_6^2$$

Отсюда

$$a_5^2 = \frac{r^2}{4} (6 - 2\sqrt{5}) + r^2,$$

$$a_5 = \frac{r}{2} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$

Одинадцатое предложение устанавливает связь между стороной правильного пятиугольника и одной из тестетовых иррациональностей, — так называемой *меньшей*.

Для понимания этого предложения необходимо напомнить несколько определений книги X.

Вычетом называется иррациональность вида

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} \quad (a > b),$$

квадрат которой не может быть выражен рациональной величиной. Линия $\sqrt{b}$ называется *сочетающейся* с данным вычетом, так как, добавляя её к последнему, мы получаем прямую $\sqrt{a}$, которая по терминологии книги X считается *рациональной*, даже если a не является полным квадратом (тогда по терминологии книги X она будет *рациональной только в степени*).

Вычеты делятся на классы в зависимости от того, будет ли линейно рациональным $\sqrt{a}$ (*первый* и *четвёртый* вычеты), или $\sqrt{b}$ (*второй* и *пятый* вычеты), или же ни один из них (*третий* и *шестой* вычеты). Дальнейшее деление устанавливается в зависимости от того, будет ли разность $a - b$ соизмерима с $\sqrt{a}$ линейно (*первый*, *второй* и *третий* вычеты), или же нет (три остальных). В дальнейшем нас будет интересовать *четвёртый вычет*, определяемый как разность двух прямых $\sqrt{a}$ и $\sqrt{b}$, разность квадратов которых $a - b$ не будет линейно соизмерима с $\sqrt{a} = kr$, где r — некоторая рациональная прямая. Его можно представить формулой

$$A_4 = kr - kr \sqrt{\frac{m}{m+n}},$$

где подраженное выражение не будет представлять точного квадрата.

Извлекая квадратный корень из четвёртого вычета, мы приходим к так называемой *меньшей иррациональности*, которая представляет выражение вида $\sqrt{x} - \sqrt{y}$, где $\sqrt{x}$ и $\sqrt{y}$ будут несоизмеримы даже в степени, но $x + y$ будет рационально, тогда как произведение $\sqrt{xy}$ иррационально.

С нашей точки зрения мы провели бы доказательство так. Стороны пятиугольника выражаются формулой.

$$a_2 = \frac{r}{2} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$

Если диаметр $2r$ будет рациональным, то, конечно, будет рациональной и половина радиуса $\frac{r}{2}$. Нам нужно представить

$\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$ в виде разности двух простых $\sqrt{x} - \sqrt{y}$.

Имеем:

$$\begin{aligned} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} &= \sqrt{x} - \sqrt{y}, \\ 10 - 2\sqrt{5} &= x + y - 2\sqrt{xy}, \end{aligned}$$

это равносильно двум уравнениям:

$$x + y = 10, \quad xy = 5,$$

решая которые находим:

$$x = 5 + \sqrt{20}, \quad y = 5 - \sqrt{20}.$$

Следовательно,

$$a_2 = \frac{r}{2} (\sqrt{5 + \sqrt{20}} - \sqrt{5 - \sqrt{20}}).$$

Мы видим, что:

1) $\sqrt{x} = \sqrt{5 + \sqrt{20}}$ и $\sqrt{y} = \sqrt{5 - \sqrt{20}}$ будут несоизмеримы даже после возведения их в квадрат,

2) $x + y = 10$ — рациональна,

3) $\sqrt{xy} = \sqrt{5 + \sqrt{20}}(5 - \sqrt{20}) = \sqrt{5}$, что представляет иррациональную площадь.

Таким образом, сторона правильного пятиугольника действительно является «меньшей иррациональной».

Точно так же нетрудно установить, что стоящее под знаком корня в формуле для a_5 выражение $10 - 2\sqrt{5}$ представляет четвертый вычет. Действительно, первый член (10) рационален, что соответствует первому и четвертому вычетам, разность же квадратов $10^2 - (2\sqrt{5})^2 = 80$ не представляет точного квадрата, что является свойством четвертого, пятого и шестого вычетов.

То, что с нашей точки зрения представляется достаточно легким делом, для Евклида было значительно труднее. Хотя его рассуждений сводится к следующему. В пятиугольнике $ABCDF$ (черт. 13а, вписанном в круг с рациональным диаметром $AH = 2AI$) он проводит два перпендикулярных сторонам CD и DE диаметра и на одной из них откладывает $IK = \frac{1}{4} AI$. Нетрудно видеть, что BK будет тоже рациональной.

Так как $BA^2 = BM \cdot BG$, то нам нужно будет показать, что BM является четвертым вычетом; тогда BA , как квадратный корень из произведения четвертого вычета на рациональную прямую — принимаемый за единицу диаметр, необходимо будет «меньшей» иррациональной.

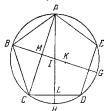
Из подобия треугольников ACL и AMI получаем:

$$LC:CA = MI:IA,$$

$$2LC:CA = 2MI:IA = MI:\frac{IA}{2},$$

$$2LC:\frac{CA}{2} = MI:\frac{IA}{4},$$

$$CD:CM = MI:IK,$$



Черт. 13.

отсюда после составления производной пропорция со сложением и возведения в квадрат получаем:

$$\frac{(DC + CM)^2}{CM^2} = \frac{MK^2}{IK^2}.$$

Но DC как сторона правильного пятиугольника будет большим отрезком при делении AC в крайнем и среднем отношении. Это дает нам (поскольку $CM = \frac{AC}{2}$):

$$(DC + CM)^2 = 5CM^2,$$

откуда

$$MK^2 = 5 \cdot IK^2 = 5 \left(\frac{BK}{5} \right)^2,$$

$$BK^2 = 5MK^2.$$

Далее,

$$BM = BK - MK.$$

Мы видим, что BM является разностью двух отрезков, которые соизмеримы только в степени, т. е. вычетом, причём вследствие рациональности BK или первым, или четвертым.

Для окончательного решения вопроса нам остаётся исследовать выражение

$$BK^2 - MK^2 = N^2.$$

Но $BK^2 = 5MK^2$, $N^2 = 4MK^2$; отсюда

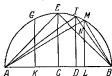
$$BK^2:N^2 = 5:4,$$

что не представляет отношения точных квадратов. Значит, N не будет линейно соизмерима с рациональной BK , а это равносильно

тому, что BM будет четвертым вычетом. Из этого же на основании предложения 94 книги X следует, что BA , quadriрующая произведение $BM \cdot BG$, т. е. по нашим обозначениям $BA = \sqrt{BM \cdot BG}$, будет меньшей, иррациональной ($M. B.$).

8. Другое доказательство предложения 18. В приложении к IV тому Евклида в издании Гейберга помещен следующий вариант заключительной части доказательства предложения 18 (черт. 14):

«Иначе, что MB будет больше NB . Действительно, поскольку AD вдвое больше DB , то AB втрое больше BD . Как же AB к BD , так и «квадрат» на AB к «квадрату» на BI , вследствие того, что треугольник IAB равноуголен треугольнику IDB . Значит, «квадрат» на AB в три раза больше «квадрата» на BI . Доказано же, что «квадрат» на AB в пять раз больше «квадрата» на KL . Значит, пять «квадратов» на KL будут равны трем на IB . Но три «квадрата» на IB будут больше, чем шесть на NB . И, значит, пять «квадратов» на KL будут больше шести на NB . Так что и один «квадрат» на KL будет больше одного на NB . Значит, KL больше NB . Но KL равна LM . Значит, LM больше NB . Значит, должно MB быть больше NB , что и требовалось доказать. А что три «квадрата»



Черт. 14.

на IB будут больше шести на NB , докажем так: действительно, поскольку BN больше NI , то, значит, «произведение» $IB \times BN$ будет больше $BI \times IN$. Значит, $IB \times BN$ вместе с $BI \times IN$ будут больше чем вдвое больше $BI \times IN$. Но $IB \times BN$ вместе с $BI \times IN$ есть «квадрат» на IB , «произведение» же $BI \times IN$ есть «квадрат» на NB . Значит, «квадрат» на IB будет больше чем вдвое больше «квадрата» на NB . Значит, один «квадрат» на IB будет больше двух на NB . Так что и три «квадрата» на AB будут больше шести на NB , что и требовалось доказать.

9. Античная космология и правильные тела. Пифагорейцы учили о «выражении вещей числами».

В глазах пифагорейцев математическое заключалось не в святах явлений, которые им представлялись большей частью случайными, а в самих явлениях.

В каждом явлении пифагорейцы искали выражение различных свойств чисел, весь мир представлялся им своего рода формой, в которую облачаются соотношения между числами, принадлежащими к более глубокой ступени существования. Можно сказать, что первой ступенью той лестницы, по которой число поднимается из имманентной сущности в мир явлений, представляется геометрическая форма. Она выявляет число в наиболее выразительной форме и получает особенно важное метафизическое значение в том случае, когда геометрическая форма разлагается на другие геометрические формы, в основе которых ле-

жат какие-либо числа, имеющие особенное значение в глазах пифагорейцев.

Таковы на плоскости: треугольник, квадрат и шестиугольник, так как плоскость может быть разделена на правильные многоугольники только этих типов.

Таковы и *правильные многогранники*, которые в противоположность правильным многоугольникам обнаруживают удивительное свойство, состоящее в том, что существует только определенное число их, причём каждый имеет число рёбер и граней с определённым значением, характерным в глазах пифагорейцев.

Вполне естественно, что атомы первичных элементов под влиянием пифагорейских идей уже у Демокрита получают *формы правильных многогранников*. Идея эти дальше развиваются Платоном, который даёт атомам стихий — земли, воды, воздуха и огня — форму тетраэдра, гексаэдра, октаэдра и икосаэдра, оставляя додекаэдр для эфира.

Бруншвиц⁵⁾ совершенно правильно характеризует различие точек зрения Пифагора и Платона тем, что у первого вещи «*отображаются*» числам, а у второго «*участвуют*» числам. Но и у того и у другого числа и геометрические формы, с ними связанные, имеют определённо метафизическое значение.

Прокл⁶⁾ вполне определённо говорит, что сам Евклид в своих «Началах» конечной целью ставит построение правильных тел. Но М. Кантор⁷⁾ оспаривает этот взгляд: «В книге, — говорит он, — представляющей искусно выполненное расчленение работы, возможно её завершение в некоторой высшей точке, но цель работы даётся и завершается во всём её развитии».

Поскольку речь идёт о самом *Евклиде*, можно, пожалуй, отрицать *сознательную* постановку такой цели, но тщательный анализ «Начал» меня решительно убеждает, что построение правильных тел, и ещё более — доказательство существования пяти и при том *только* пяти тел — представляло некогда, ещё до Евклида, конечную цель того труда, из которого проиступили «Начала», путём переработки, состоящей, во-первых, в прибавлении *суждений* этой цели арифметических книг (VII, VIII и IX), во-вторых, в пополнении и тех частей, в тесной зависимости от которых находится книга X (II, материалом, тоже не имеющим к ней отношения⁸⁾).

⁵⁾ Brunschwig, Les étapes de la philosophie mathématique, Paris, 1912.

⁶⁾ Proclus Diadochus, Commentarii in [librum Euclidis].

⁷⁾ M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik.

⁸⁾ Проф. Д. Д. Мордухай-Болтовской забывает «Начала» Гиппократа Хиосского — первое сочинение по геометрии, являющееся истинным предшественником труда Евклида; вряд ли там могла быть речь о пяти правильных телах (H. B.).

Здесь прежде всего отметим, что книга IV имела раньше совершенно то же значение, что и XIII, ибо содержание книги IV — исследование вписанных и описанных около круга правильных многоугольников, входящих граниями в платоновы тела, имеет непосредственное к ним отношение.

Между книгами XI и XIII существует тесная связь. Но книга XII, трактующая о призмах, пирамидах, конусах и цилиндрах, не имеет никакого приложения к книге XIII. Совершенно ясно, что в дооклидových «Началах», а может быть, и в евклидовых, она была составлена тогда, когда прежняя цель — правильные тела — постепенно стала отодвигаться с первого плана, — когда средства стали обращаться в цель, различные проблемы «Начал» стали интересовали математиков *сами по себе*.

Вставка книги XII повлекла за собой расширение книги XI предложениями 26—30, не нахолящими себе применения в книге XIII, книга V (о пропорциях) и книга X (об иррациональных величинах) находят себе применение в книге XIII, но, пожалуй, не столь большое, как бы следовало ожидать. Для всех предложений книги XIII, кроме 17-го, нужно лишь начало книги X. Но построение додекаэдра нуждается в теории иррациональных величин, называемых вычетами, сменяемыми иррациональными и т. д., которая дана в книге X.

Задача о построении додекаэдра, видимо, долго была задачей, не поддававшейся решению, и только теория иррациональных величин дала возможность раскусить этот орех.

Весьма вероятно, что была и другая причина тому, что построение додекаэдра явилось позже: видимо, додекаэдр был открыт значительно позже других четырех правильных тел.

Некоторые высказывают мнение, что он был известен еще древним пифагорейцам.

Между тем, если основывать предположить, что додекаэдр не был известен даже Платону в то время, когда он писал свой диалог «Тимей», где говорится:

«Каждая прямоугольная фигура состоит из треугольников и каждый треугольник разлагается на два прямоугольных треугольника, равнобедренных или неравнобедренных. Из последних наименее прекраснейшие те, которые будут составлять равнобедренный треугольник, в которых квадрат, построенный на большем катете, равен трем квадратам на малом».

Два или четыре равнобедренных прямоугольных треугольника составляют квадрат, а два или шесть наименее прекраснейших неравнобедренных прямоугольных треугольников составляют равнобедренный треугольник. А из этих двух фигур происходят те, которые соответствуют четырём элементам мира, а именно: *тетраэдру, октаэдру, икосаэдру и кубу*.

Открытие додекаэдра повлекло за собой и расширение IV книги материалов, относившихся к *правильному пятиугольнику*, который у Пифагора не мог иметь того значения, как шестиугольник, на который делится плоскость.

Следует думать, что *виды тел* *и* *возможности существования только пяти правильных тел* представляет наиболее древнюю часть книги XIII, относящейся, вероятно, вместе с книгой XI к времени, близкому к Платону.

Следующей за этой пробасмой, по всей вероятности, стояла пробасма об отношении стороны правильного многогранника к радиусу, т. е. о *соизмеримости* или *неизмеримости* стороны многогранника к радиусу шара, в который многогранник вписан. Когда убедились, что и здесь, как в случае диагонали и стороны квадрата, имеет место несоизмеримость, была поставлена задача о *соизмеримости* и *несоизмеримости* в *степенях*, т. е. о возможности выражения стороны через $\sqrt[n]{a}$, где a рационально.

Положительный ответ получился только для сторон тетраэдра, гексаэдра и октаэдра, выражаемых формулами:

$$\frac{2}{3} R \sqrt[3]{6}, \quad \frac{2}{3} R \sqrt[3]{3}, \quad R \sqrt[3]{2}.$$

а для икосаэдра получалась меньшая иррациональность:

$$\frac{1}{3} R \sqrt[3]{10(5 + \sqrt{5})},$$

для додекаэдра же вычет

$$\frac{1}{3} R (15 + \sqrt{3}).$$

Эти исследования являются, конечно, причём продолжением пифагорейских, искавших в правильных геометрических формах характерных числовых отношений.

10. К истории правильных тел⁸. Мы выше указывали, какую роль играл Платон в истории правильных тел, и отмечали, что не следует приписывать Евклиду всё содержание «Начал». Евклид использовал открытия многих своих предшественников, привел их в систему, связав их более строгими доказательствами. Вероятно, Евклид был более *методичек*, чем *творец*.

Пятая книга «Начал» приписывается *Евдоксу*. Часть десятой книги и часть тринадцатой принадлежит *Тестею*. Согласно Платону Тестей работал над иррациональными величинами десятой книги, и это не исключает того, как заметил М. Кантор, что до него были также работы о додекаэдре, представлявшие тогда научную новинку.

Около времени, в которое Евклид писал свои работы, Аристеем была написана работа о сравнении правильных тел. Она была использована только Гипсиклом, написавшим четырнадцатую книгу «Начал».

⁸ Brückner, Vielecke und Vielfläche, Theorie und Geschichte, Leipzig, 1900.

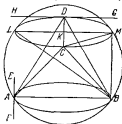
К сожалению, до нас не дошло сочинение Аполлония о шаре и вписанных в него додекаэдре и икосаэдре, которое тоже, вероятно, было материалом для четырнадцатой книги.

Предполагают, что интересное построение правильных многогранников в шаре с помощью параллельных кругов, изложенное Паппом, взято из сочинения Аристена.

Аполлонию принадлежит теорема, которой античные математики придавали большое значение: *отношение объемов октаэдра и икосаэдра равно отношению их поверхностей*.

Дальнейшие работы в духе Евклида, относящиеся к многогранникам, велись Архимедом. Его работы утеряны, но упоминаются Паппом.

Архимед обнаруживает 13 новых тел, у которых грани — правильные многоугольники, хотя и различных родов. У трех из этих многогранников по три рода многоугольников, у других по два; число граней колеблется между 8 и 92.



Черт. 15.

В настоящее время эти многогранники подводят под понятие *полуправильных тел*, т. е. таких, у которых вершины однородны: в каждой вершине сходится в одинаковом порядке и одинаковом числе те же самые грани, что и в других вершинах.

Интерес к правильным телам воскрес в XV веке среди архитекторов. После работы Пьеро делла Франческа (1457) мы имеем известную работу Луки Пачиоли⁹⁾ о «божественной пропорции» (1509),

где рассматриваются архимедовы тела и способ их получения. О правильных телах говорят также Оронтій Финей¹⁰⁾ и Рамус¹¹⁾ (1569).

11. Правильные многогранники у Паппа. Другое построение пяти правильных тел находится в «Математическом собрании» Паппа Александрийского (книга 3, вид. Гульча, стр. 142—163). Даём текст Паппа.

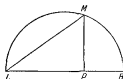
48. *В данную сферу вписать пирамиду* (черт. 15). Пусть она будет вписана и вершины ее углов на поверхности сферы будут A, B, C, D . Проведём EF через A параллельно CD ; она образует с AC и AD равные углы [каждый в две трети прямого, так как она находится с ними в одной плоскости]. Кроме того, AB стоит, образуя с AC и AD равные углы; на основании

⁹⁾ L. Pacioli, De divina proportionе, 1509.

¹⁰⁾ Orontius Finaeus, Promathesis, Paris, 1550.

¹¹⁾ P. Ramus, Arithmeticae l. 2. Geometriae l. 21, pp. 165—168.

доказанного выше EF будет перпендикулярной к AB и, кроме того, касательной к сфере. Действительно, если мы проведем плоскость через DA , AC , то она $<$ в сечении со сферой $>$ образует круг, в который будет вписан равнобедренный треугольник ADC , и EF (по построению) параллельна CD ; значит, EF будет касательной к этому кругу, а следовательно, и к сфере. Теперь, проведенная через EF , AB плоскость в сечении со сферой образует круг, диаметром которого будет AB вследствие того, что она точно так же перпендикулярна к касательной EF . И если через D параллельно AB проведем HG , то она будет касаться сферы и CD будет к ней перпендикулярной. И если через HG , CD провести плоскость, то она образует круг, имеющий диаметр CD , равный и параллельный тому кругу, который имеет



Черт. 16

диаметром AB ; ибо EF , CD и AB , HG параллельны. Через центр K проведем LM , перпендикулярную к CD , она, значит, будет параллельной AB . И если соединить BL , BM , то BM будет перпендикулярной каждой из AB , LM , а также плоскостям кругов, BL же будет диаметром сферы (ибо это доказано ранее). И поскольку после соединения MC мы имеем, что LM^2 в два раза больше MC^2 , то и BC^2 будет в два раза больше CM^2 . И угол BMC прямой; значит, BM равна MC , так что LM^2 в два раза больше MB^2 , значит, BL^2 в полтора раза больше LM^2 .

$$BL^2 - LM^2 + MB^2 = LM^2 + MC^2 = LM^2 + \frac{1}{2} LM^2 = \frac{3}{2} LM^2.$$

И диаметр BL сферы задан; значит, будет дана и LM — диаметр рассматриваемого круга. Значит, даны будут по положению и оба круга, а следовательно, и точки A , B , C , D .

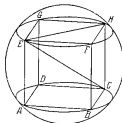
Синтез будет очевидным, ибо потребуются вписать в сферу два равных и параллельных круга так, чтобы диаметр сферы в степени был в полтора раза больше каждого диаметра, затем провести два параллельных диаметра AB , LM , как мы видели выше, затем к LM перпендикуляр CD через центр и получить вершины углов A , B , C , D пирамиды. Доказательство пойдет обратным ходом аналогично, и одновременно будет доказано, что диаметр сферы в степени будет в полтора раза больше стороны пирамиды.

Построение прямой, равной в степени $\frac{2}{3}$ диаметра сферы, выполняется так (черт. 16): диаметр LB сферы делим в P так, чтобы $LP = 2PB$, и проводим PM под прямым углом до пересечения с большим кругом LMN сферы; тогда LM будет искомым диаметром обоих кругов. Действительно,

$$LM^2 = LP \cdot LB, \\ LM^2 : LB^2 = LP : LB = 2 : 3.$$

43. В данную сферу вписать куб.

Пусть он будет вписан, и пусть вершины его углов на поверхности сферы будут A, B, C, D, E, F, H, G (черт. 17); про-



Черт. 17.

водим через них плоскости; они образуют в сечениях равные и параллельные круги; ибо находящиеся в них квадраты [принадлежащие кубу] равны и параллельны. И соединяющая CE будет диаметром сферы. Соединим также EH . Поскольку EH^2 в два раза больше EG^2 , то-есть HC^2 , и угол CHE прямой, то CE^2 будет в полтора раза больше EH^2 :

$$CE^2 = HC^2 + EH^2 = EG^2 + EH^2 = \frac{EH^2}{2} + EH^2 = \frac{3}{2} EH^2.$$

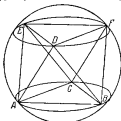
Но CE^2 дан; значит, дан и EH^2 . И EH ось диаметра круга $EFHG$; значит, дан будет и этот круг, а следовательно, и круг $ABCD$, и находящиеся в них квадраты, и вершины сторон куба.

Синтез тоже будет очевидным, ибо требуется вписать в сферу два параллельных круга, а при равенстве их диаметров должен диаметр сферы быть в степени по отношению к ним подугорным, затем вписать в один из них квадрат $ABCD$, а в другом круге провести FH , равную и параллельную BC , как мы показали выше, дополнить на ней квадрат $EFHG$ и таким образом получить вписанный куб. Следуя ходу рассуждений в анализе, мы докажем, что квадратом будет и $BFHC$ и все остальные,

и одновременно будет доказано, что диаметр сферы будет в степени в три раза больше стороны куба и что одни и те же круги содержат вершины и пирамиды и куба, ибо и для первой диаметр сферы будет в степени в полтора раза больше диаметра каждого из кругов.

30. В данную сферу вписать октаэдр.

Пусть он будет вписан и вершины его углов на поверхности сферы будут A, B, C, D, E, F ; проведенные через них плоскости образуют круги ABC и DEF (черт. 18). Поскольку из точки D на поверхность сферы упали разные прямые DA, DB, DE, DF , то точки A, E, F, B будут в одной плоскости [ибо соединяющие их с центром сферы прямые будут равны]. И AB, BF, FE равны друг другу и находятся в круге; значит, $AEFB$



Черт. 18.

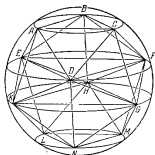
есть квадрат, и EF параллельна AB . Точно так же и DE параллельна BC , а DF параллельна AC ; значит, будут параллельными и круги; и они равны друг другу, поскольку равны находящиеся в них равнобедренные треугольники. И поскольку в сфере имеются равные и параллельные круги, и в них равные и параллельные прямые AB, EF , причем они находятся не по одну сторону от центров, то соединяющая AF будет диаметром сферы [и AE, FB будут вместе с AB, EF заключать прямые углы, как доказано раньше^{*)}]. И AE, EF равны; значит, AF^2 вдвое больше FE^2 . Квадрат же на диаметре круга DEF равен четырем третям EF^2 ^{**)}; значит, AF^2 будет в полтора раза больше квадрата на диаметре круга DEF ; значит, даны и этот диаметр, и круг, а следовательно, и круг ABC , и находящиеся на них точки.

В соответствии с этим идет и синтез; действительно, подобно тому, как выше, требуется вписать в сферу два равных и па-

^{*)} У Папия в специальной лемме (т. I, изд. Гудча, стр. 136—138).

^{**)} Так как сторона правильного треугольника в круге радиуса R равна $R\sqrt{3}$.

параллельных круга, причём диаметр сферы будет в степени в полтора раза больше диаметра каждого из них, затем в один из них вписать равносторонний треугольник ABC , а в другом круге провести EF , равную и параллельную AB , на ней описать треугольник DEF и таким образом получить построенный октаэдр. И одновременно доказывается, что диаметр сферы будет в степени в два раза больше стороны октаэдра. Вместе с тем усматривается, что при вписывании пирамиды, куба и октаэдра упо-



Черт. 19.

требляются одни и те же круги и что тот же самый круг вмещает и квадрат куба, и треугольник октаэдра.

31. В данную сферу вписать икосаэдр.

Пусть он будет вписан и пусть на поверхности вершины его углов будут ABC, DEF, HGK, LMN (черт. 19). Поскольку из точки B на поверхность сферы упали равные друг другу прямые AB, BC, BF, BH, BE , то точки A, C, F, H, E будут в одной плоскости [ибо соединяющие их с центром сферы прямые будут равны]. И AC, CF, FH, HE, EA равны друг другу и находятся в круге; значит, пятиугольник $AEHFC$ будет равноугольным; подобно же этому будут равносторонними, равноугольными [и находящимися каждый в одной плоскости] и каждый из пятиугольников $KEBCD, DGFBA$, а также $AKLHB, AKNGC, CGMNB$. И будут параллельными: AC соединяющей EF , EF же — KG , KG же — LM , ибо и $LKDG$ есть < равносторонний > пятиугольник. Подобным же образом докажется, что будут параллельными соединяющие BC, ED, HU, LV , а также соединяющие BA, FD, HK, MV . И точно так же круг около A, B, C будет равен и параллелен кругу около L, M, N , ибо в них находятся равные и подобные треугольники ABC, LMN . Также будут равными и параллельными круги около точек D, E, F, K, H, G , ибо

и в них треугольники равны и равносторонни, так как каждая сторона стягивает угол пятиугольника. Теперь, поскольку в сфере круги около DEF , KHG равны и в них параллельные стороны EF , KG равносторонних треугольников будут не с одной и той же стороны от центров, то соединяющая FK будет диаметром сферы, а угол FEK прямым, ибо это уже доказано выше. И поскольку $HEACF$ есть <правильный> пятиугольник, то при делении EF в крайнем и среднем отношении большим отрезком будет AC ; значит, EF имеет к AC то же самое отношение, как сторона шестиугольника к стороне десятиугольника. И FK квадратирует их обоих

$$FK^2 = EF^2 + EK^2 = EF^2 + AC^2$$

вследствие того, что EK равна AC ; значит, диаметр FK сферы будет иметь к EF отношение, как сторона пятиугольника к стороне шестиугольника;

$$FK:EF = a_5:a_6,$$

к AC же, — как сторона пятиугольника к стороне десятиугольника:

$$FK:AC = a_5:a_{10}^*).$$

И диаметр сферы задан; значит, заданы будут и каждая из EF , AC , а следовательно, и радиусы этих кругов, являющиеся в степени одной третьей EF , AC («Начала», XIII, 12); значит, будут даны и сами эти круги, а также и другие, равные им и параллельные, и находящиеся в них вершины углов многогранника.

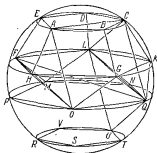
Синтез точно так же очевиден; действительно, требуется найти две прямые, к которым диаметр сферы будет иметь отношение, как сторона пятиугольника к сторонам шестиугольника и соответственно десятиугольника, и начертить в сфере два круга, радиусы которых в степени будут равны третьим частям найденных прямых, как, например, круги DEF , ABC , с другой стороны от центра сферы начертить равные и параллельные им круги KHG , LMN , поместить в каждом из них стороны равносторонних треугольников AC , EF , KG , IM так, чтобы они были параллельными и располагались попеременно по разные стороны от центров, и вписать в них целые треугольники, дающие вершинами многогранника. И доказательство легко получается из анализа. Вместе с тем усматривается, что диаметр сферы будет в степени в три раза больше стороны пятиугольника, вписанного в круг DEF , ибо KF к FE имеет отношение, как сторона пятиугольника к стороне шестиугольника, EF же — к стороне вписанного в тот же круг шестиугольника — как сторона треугольника к стороне шестиугольника, а сторона треугольника в сте-

*). Для понимания всего этого рассуждения нужно иметь в виду предложения 9 и 10 книги XIII «Начал».

пени будет в три раза больше стороны шестиугольника; значит, диаметр KP сферы будет в степени в три раза больше стороны вписанного в круг DEF пятиугольника.

52. В данную сферу вписать одекаэдр.

Пусть он будет вписан и пусть вершины его углов будут $A, B, C, D, E, F, H, G, K, L, M, N, Q, P, R, S, T, U, V$ (черт. 20). Вот ED будет параллельной FL , а AE параллельной FH . Вследствие того же самого будут параллельны и остальные, так что и плоскость, проходящая через $ABCDE$, будет параллельна плоскости через $FHGKL$. Поскольку же OA, QC параллельны (ибо каждая из них параллельна BG) и равны, то, значит, и GQ ,



Черт. 20.

AC параллельны, а следовательно, и ST, ED . Подобным же образом и SK, CD и также остальные; и значит, проходящие через них плоскости будут параллельны. Теперь вообразим описанные около этих точек [параллельные] круги. Тогда круг около $ABCDE$ будет равен кругу около $RSTUV$, ибо находящиеся в них $<$ правильные $>$ пятиугольники равны. Круг же около $FHGKL$ равен кругу около $MNOP$, ибо и в них $<$ правильные $>$ пятиугольники равны. И CL параллельна QU (ибо каждая из них параллельна KN); значит, точки L, C, Q, U будут в одной плоскости. Будут равны и соединяющие их, ибо они стягивают углы равных пятиугольников; затем они находятся в круге; значит, $LCQU$ — квадрат, так что соединяющая QL будет в степени в два раза больше LC , или, что то же, FL . И угол QLF прямой, ибо OQ, FL суть равные и параллельные прямые в равных кругах; значит, QF^2 в три раза больше FL^2 . И вследствие доказанного выше диаметр сферы будет FQ , ибо OQ, FL не находится по одну сторону от центров. Теперь диаметр сферы будет иметь к FL отношение, как сторона треугольника к стороне шести-

угольника, вписанного в тот же круг $FHGKL$ («Начала», XIII, 12). Но также и FL < как сторона вписанного в тот же круг пятиугольника > имеет к стороне треугольника отношение, как сторона пятиугольника к стороне треугольника; значит, оно равно, и диаметр сферы будет иметь к стороне треугольника отношение, как сторона пятиугольника к стороне шестиугольника. Поскольку же и отношение FL к EL будет отношением сторон шестиугольника и десятиугольника (ибо при делении FL в крайнем и среднем отношении большим отрезком будет ED , вследствие того что FL ставится под пятиугольника, стороной которого будет ED), как же FL к ED , так и сторона треугольника к стороне треугольника, вписанного в круг $FHGKL$, имеет отношение, как сторона < первого > треугольника к стороне < второго > будет иметь то же отношение, что сторона шестиугольника к стороне десятиугольника. Но также и диаметр сферы к стороне треугольника, вписанного в круг $FHGKL$, имеет отношение, как сторона пятиугольника к стороне шестиугольника; значит, диаметр к стороне треугольника в круге $ABCDE$ имеет отношение сторон пятиугольника и десятиугольника, значит, в каждом круге сторона треугольника будет дана, а значит, будут даны и радиусы, равняющиеся в степени третьей частью этих сторон; значит, будут даны и эти круги и равные и параллельные им другие, и находящиеся в них вершины многогранника, что и требовалось доказать.

В синтезе нужно найти две < прямые >, к которым диаметр сферы будет иметь отношение, как сторона пятиугольника к сторонам шестиугольника и десятиугольника, что мы уже изложили относительно икосаэдра, затем начертить на поверхности сферы два параллельных круга, расположенных по одну и ту же сторону от центра, как например, $FHGKL$, $ABCDE$, радиусы которых в степени будут соответственно равны третьим частям найденных прямых.

Затем два других круга, равных и параллельных этим, нужно поместить с другой стороны от центра сферы, как $MNQOP$, $RSTUV$, вставить параллельные стороны пятиугольника GD , FL , OQ , ST и по ним вычертить пятиугольники, через посредство которых получают и вершины многогранника. И из построения ясно, что круги, содержащие углы додекаэдра, будут теми же самыми, которые содержат и углы икосаэдра, и что тот же самый круг обнимает и треугольник икосаэдра и пятиугольник додекаэдра, вписанного в ту же самую сферу» (II, B).

12. «Гармония мира» Кеплера¹². Кеплеру принадлежит открытие трех знаменитых законов планетного движения:

1. Планета движется по эллипсу, в фокусе которого находится Солнце.

¹² J. Kepleri, Opera omnia, ed Ch. Friesch, vol. I (1864), *Mysterium cosmographicum*.

2. Площади, описываемые радиусом-вектором планеты, пропорциональны времени.

3. Квадраты времён обращения двух планет пропорциональны кубам больших полуосей их орбит.

Сам Кеплер придалава большее значение другому своему открытию — закону, которым определяется расстояние планет от Солнца. Однако время дало совсем иную оценку этим двум открытиям: первое послужило Ньютоном к выводу закона всемирного тяготения, второе же в настоящее время совершенно забыто.

Мы никак не можем принять теперь этой таинственной связи между планетными расстояниями и свойствами правильных многогранников. В наших глазах всё то, что вывел Кеплер, будет всегда представляться только *случайностью*, так как мы уже очень далеко ушли от пифагорейского мировоззрения, видевшего в явлениях природы осуществление каких-то числовых законов, характерных как для *Музыкального*, так и для *материальной* гармонии.

У Кеплера при разыскании этих законов было совершенно то же настроение, что у Пачиоли, который тоже приписывает правильным многогранникам какое-то метафизическое значение (как Пифагор и Платон) и обращает особое внимание на роль в теории правильных тел золотого (божественного) сечения, т. е. того сечения, которое играет роль и в музыкальной гармонии.

Кеплер берёт следующую конфигурацию: вокруг сферы, на поверхности которой движется Меркурий (его орбита принимается за круг), описывается *октаэдр*; вокруг октаэдра — сфера, на которой находится Венера; вокруг последней сферы описывается *икосаэдр* и вокруг него сфера, на которой оказывается Земля; далее идёт *додэкаэдр* со сферой, на которой движется Марс; затем описывается *тетраэдр* на сфере Юпитера, затем следует куб со сферой, на которой находится последняя известная Кеплеру планета — Сатурн.

С открытием второго закона эта конфигурация могла сохранять только значение *приближения* к построению, но с открытием новых планет и это значение потерялось, так как всех правильных тел только пять и для новых планет их уже не хватает. К тому же следует добавить, что более точное определение расстояний даёт значительное отклонение от кеплеровского построения.

13. **Архимедовы тела у Кеплера.** На основании сохранившихся указаний Папы Кеплером была дана полная теория архимедовых тел во второй книге (*Harmonices mundi*) (предложение 28). Даем перевод соответствующего места.

«28. *Предложение.* Для нижней степени совершенной конфигурации в твёрдом теле существуют тринадцать видов, из которых получаются тринадцать архимедовых тел.

Действительно, так как в этой степени соединяются различные фигуры, то поэтому согласно предложению 21 будут соединяться фигуры или двух, или трёх видов. Если двух, то между

ними или будут треугольники, или же нет. Значит, из треугольников и квадратов могут получиться три тела, удовлетворяющие определению пункта 9^{*)}. Действительно, последнее отбрасывает следующие три формы, в которых телесный угол образуется двумя или тремя треугольниками с одним плоским углом квадрата, или одним треугольником с двумя квадратами; в самом деле, в первом случае мы имеем только один квадрат, получается половина октаэдра и телесные углы будут различной формы; во втором случае мы имеем только два квадрата, а в третьем только два треугольника, что согласно определению пункта 10^{**)} соответствует несовершенной конгруэнции. Таким образом, остаются лишь следующие случаи образования телесного угла плоскими. Во-первых, четыре треугольных и один квадратный ^{***)}, ибо в сумме они меньше четырех прямых. В этом случае соединяются шесть квадратов и тридцать два (т. е. 20 и 12) треугольника и получается фигура, которую я называю *плоским кубом* (Cubum planum). Он изображен на фигуре 21, 1 (черт. 21).

Действительно, пять плоских треугольных углов и один квадратный в сумме превзойдут четыре прямых: тогда как по предложению 16 для образования телесного угла они должны давать менее четырех прямых. Точно так же четыре треугольных и два квадратных составляют четыре прямых.

Во-вторых, два треугольных и два квадратных угла дают менее четырех прямых; в данном случае соединяются восемь треугольников и шесть квадратов и образуют один четырнадцатигранник, который я называю *кубиктаэдром*. Он изображен на фиг. 21, 2. Два же треугольных угла с тремя квадратными превзойдут четыре прямых.

В-третьих, один треугольный угол и три квадратных имеют менее четырех прямых. В данном случае соединяются восемь треугольников и 18 т. е. 12 и 6) квадратов в один двадцатигранник, который я называю *усеченным кубиктаэдром*.

*9. *Определение.* Совершенной конгруэнцией нижней степени называется такая, в которой правильные многоугольники и все телесные углы находятся на одной сферической поверхности и все подобны друг другу, но многоугольники, однако, принадлежат к разным классам, причем отдельные фигуры встречаются в таком числе, как и в одной из совершеннейших фигур (пяти правильных многогранников), то-есть не менее 4, так как тело может быть ограничено самое меньшее четырьмя плоскими фигурами.

*10. *Определение.* Несовершенная конгруэнция или фигура получается, когда наибольший многоугольник встречается один или два раза при прочих тех же самых условиях.

*11. Здесь и далее подразумевается угол правильного треугольника и квадрата.

ским ромбом или ромбикубоктаэдром. Он изображён на фигуре 21,3.

В этих трёх телах находятся квадраты вместе с треугольниками; в дальнейшем будем соединять с ними и между собой пятиугольники.

Пять плоских треугольных углов не могут стоять с одним пятиугольным, так как они не могли соединиться и с меньшими его — квадратным углом. Значит, четыре треугольных с одним пятиугольным дают менее 4 прямых и так соединяются 80 (т. е. 20 и 60) треугольников с 12 пятиугольниками для образования 92-гранника, который я называю *плоским додекаэдром*. Он изображён на фигуре 21,4. И в этом ряду плоскостных третьим может стоять икосаэдр, представляющий как бы плоскостный тетраэдр.

Если ты присоединишь три плоских треугольных угла к одному пятиугольнику, то получится, как выше, что только два пятиугольника войдут в тело; а если два треугольных к одному пятиугольному, то в тело войдёт лишь один пятиугольник, и в одном случае получится пояс или средняя колонна, а в другом пирамида. — и та и другая части икосаэдра, и телесные углы не будут одного рода, так как один, как в икосаэдре, будет содержать пять треугольных. И вот с одним пятиугольным углом покончено. Но три треугольных с двумя пятиугольными составляют более 4 прямых. Значит, покончено с тремя треугольными, входящими в общество пятиугольных. Два треугольных с двумя пятиугольными составляют меньше 4 прямых. Значит, соединяются 20 треугольников и 12 пятиугольников в один 32-гранник, который я называю *икосидодекаэдром*. Он изображён на фигуре 21,5. Так как два треугольных с одним треугольным мы уже отбросили, то, значит, с двумя треугольными покончено.

Один треугольный с тремя пятиугольными составляют более 4 прямых, с двумя же не даст ничего правильного, так как пятиугольник есть фигура с нечётным числом сторон (23)*). И так, с пятиугольниками в сообще. т. е. с треугольниками покончено.

Четыре треугольных с одним шестиугольным и два с двумя шестиугольными заполняют плоскость, в то время как три с двумя будут больше 4 прямых, с одним же шестиугольным допускают в конфигурацию лишь два шестиугольника; значит, отбросив три треугольных, мы для двух найдём, что они равны одному шестиугольному, почему они должны быть отброшены согласно пункту 22**). Таким образом, остаётся, что один треугольный соединяется с двумя шестиугольными. Таким образом,

*) 23. *Предлагается*. — Два плоских угла фигуры с нечётным числом сторон, соединяясь с одним другого рода, не образуют никакого правильного тела.

**) 22. *Акцима*. Если две грани не будут больше трети, они не будут заключать с последней телесного угла.



1



2



3



4



5



6



7



8



9



10



11



12



13

Черт. 21.

соединяются 4 треугольника с 4 шестиугольниками в один октаэдр, который я называю *усечённым тетраэдром*. Он изображён на фигуре 21,6. Четыре треугольных с одним семиугольным и выше мы превосходят 4 прямых; следовательно, в дальнейшем нечего и упоминать о четырёх треугольных; также нечего говорить и о трёх по часто упоминавшимся причинам; два же с двумя гранями из фигур, вышших шестиугольника, превышают 4 прямых, следовательно, в дальнейшем нечего и упоминать ни о двух треугольных углах с двумя гранями высшей фигуры, ни о двух с одной гранью высшей фигуры, так как эти случаи покрываются тем, что было отброшено в аксиоме пункта 22. Остаётся рассмотреть тот случай, когда один треугольный угол соединится с двумя гранями фигуры, высшей шестиугольника; но соединение с двумя семиугольниками отбрасывается по предложению пункта 23, а также и со всеми двумя многоугольниками нечётного числа сторон, с двумя же восьмиугольными он даёт тело, в котором соединяются 8 треугольников и 6 восьмиугольников в один 14-гранник, который я называю *усечённым кубом*. Его изображение ты имеешь на фигуре, обозначенной 21,7. С двумя десятиугольными получается тело, в котором 20 треугольников и 12 десятиугольников соединяются в один 32-гранник, который я называю *усечённым оодекаэдром*. Он обозначен номером 21,8. С двумя двенадцатиугольными заполняется плоскость и телесного угла не получается, а с высшими и тем более. И с треугольниками теперь покончено вообще, если, конечно, рассматривать соединение фигур лишь двух видов.

Следовательно, среди соединяемых двух видов фигур треугольников больше уже не будет; следующей низшей фигурой будет квадрат. Но три квадратных угла с одним высшей фигуры превышают 4 прямых, два же квадратных с одним высшей не допускаются по определению 9, так как тогда в тело войдут лишь две фигуры высшего ранга. Затем один квадратный с двумя пятиугольниками отбрасывается по 23; с двумя шестиугольниками сходится, и 6 квадратов с 8 шестиугольниками соединяются в один 14-гранник, который я называю *усечённым октаэдром*. Он нарисован на фигуре 21,9. Один квадратный с двумя семиугольными и с другими нечётного числа сторон отбрасывается по 23, с двумя восьмиугольными заполняет плоскость, с высшими же превышает 4 прямых и не годится для образования телесного угла. Таким образом, с квадратом покончено, если только плоские грани должны быть двух видов.

Два пятиугольных с одним шестиугольным или с каким-либо другим одним должны быть отброшены, ибо они подходят по 23, что мы уже использовали, говоря о треугольном и квадратном углах с двумя пятиугольными. Далее с одним десятиугольным они заполняют плоскость и не дадут телесности ни с ним, ни с высшими.

Итак, один пятиугольный с двумя шестиугольными составляет менее 4 прямых и 12 пятиугольников с 20 шестиугольни-

ками соединяются в один 32-гранник, который я называю *усечённым икосаэдром*. Его форму ты имеешь обозначенной номером 21,10. И больше нечего ждать от пятиугольника. Действительно, один пятиугольник с двумя семиугольными углами уже превышает 4 прямых. Шестиугольный с двумя другими заполняет плоскость, с высшими же превышает 4 прямых. Итак, здесь кончается с телами, состоящими из фигур двух видов.

Если же в одном телесном угле могут встречаться грани трёх видов, то нужно, во-первых, иметь в виду, что два плоских угла — один квадрата, а другой пятиугольника — превышают 2 прямых; а более высших и подавно; три же угла трёх треугольников равняются 2 прямым; значит, нельзя допускать трёх треугольных, так как сумма всех превышает 4 прямых. Два же треугольных с одним квадратным и одним пятиугольным, или же вместо него шестиугольным, или каким-нибудь высшим, отбрасываются по 23, так как треугольник — фигура с нечётным числом сторон — должен будет окружаться квадратом и пятиугольником или должен будет окружаться квадратом и пятиугольником или же вместо него шестиугольником и т. д.

Итак, один треугольный с двумя квадратными и одним пятиугольным углами составляют меньше 4 прямых, а 20 треугольников с 30 квадратами и 12 пятиугольниками соединяются в один 62-гранник, который я называю *ромбикосидекаэдром* или усечённым икосидекаэдрическим ромбом. Нарисован на фигуре 21,11.

Один треугольный, два квадратных с одним шестиугольным углом равняются четырём прямым; с одним же более высшим превосходят 4 прямых и не дают твёрдого тела. Поэтому отбрасываем два квадратных угла.

Один треугольный, один квадратный и два пятиугольных превосходят 4 прямых, и тем более, если вместо последних присоединятся два больших плоских угла. Поэтому можно прекратить рассмотрение соединения четырёх плоских углов для образования одного тела; а следовательно, можно прекратить и рассмотрение треугольных углов в тройственных сочетаниях. Действительно, один треугольный, один квадратный и один пятиугольный угол, а также и всякий другой вместо последнего отбрасываются вследствие 24*), так как треугольник есть фигура с нечётным числом сторон.

Поскольку теперь остаются всего лишь три плоских угла, то по тому же 24, среди фигур нельзя допустить ни одной с нечётным числом сторон.

Значит, квадратный угол с самыми меньшими шестиугольным и восьмиугольным дают меньше 4 прямых и 12 квадратов, 8 шестиугольников и 6 восьмиугольников соединяются в один

*) 24. *Предположение*. Три плоских угла трёх различного вида фигур, из которых одна с нечётным числом сторон, в соединении не дают совершенной телесной фигуры.

26-гранник, который я называю *усечённым кубоктаэдром*; не потому, что он может получиться вследствие усечения, но потому, что он похож на усечённый кубоктаэдр. Изобразён на фигуре 21,12.

Квадратный с шестиугольным и десятиугольным дают менее 4 прямых и 30 квадратов, 20 шестиугольников и 12 десятиугольников соединяются в один 62-гранник, который я называю *усечённым икосододекаэдром*, по той же причине, что и предыдущий (фиг. 21,13).

Если вместо десятиугольного в сообщество войдёт двенадцатиугольный, то заполнятся все 4 прямых и тела не получится; точно так же, если вместо шестиугольного войдёт восьмиугольный, а третий будет каким-нибудь большим восьмиугольного, то получится больше 4 прямых, а также если после удаления квадратного соединятся три больших угла различных четырёхсторонних фигур.

Таким образом, все семейство архимедовых тел останавливается на числе 13, что и требовалось доказать (М. В).

Единственность полуправильных архимедовых тел с присоединением к ним n -угольной правильной призмы и призматоида с треугольными гранями только в начале XIX века доказывает Мейер-Гирш¹³⁾. Доказательство основной теоремы об единственности правильных тел находим в «Элементах» Лежандра (1794). Он исследует сумму углов между рёбрами. Топологический вывод из уравнения формулы Эйлера в первый раз даёт Люилье (1812)¹⁴⁾.

¹³⁾ Meyer-Hirsch, Geometrische Aufgaben, 1802.

¹⁴⁾ L'Huilier, Annales mathématiques de Gergonne, 3, 1812—1813.

КОММЕНТАРИИ К КНИГАМ XIV И XV

1. Авторы XIV и XV книг «Начал». Автором книги XIV является александриец Гипсикл, живший, вероятно, около 200 г. н. э. (после Аполлония и до Гиппарха). Ему принадлежит также дошедший до нас «Арафорик» — астрономическое сочинение об определении прямых восхождений светил, интересное в том отношении, что в нём впервые на греческой почве, так или иначе, применяется вавилонский способ изображения неравномерного изменения какой-нибудь величины при помощи прогрессий. В этом свете становится яснее то место его послания к Протарху, где он говорит о его успехах по всем отраслям математики, а особенно в геометрии, — послания, являясь царицей математики, уже не является более единственной математической наукой, и близко то время (после Гиппарха), когда полнейшей математической наукой станут астрономия и связанные с последней вычислительные отрасли математической науки, в первую очередь тригонометрия, а за ней и алгебра.

В математическом отношении рассматриваемое сочинение не представляет особенно большого интереса, но зато интересен его математический язык. Несмотря на то, что это сочинение не является систематическим школьным учебником, его язык тот же самый, что и у Евклида, разве только в некоторых местах чуть более свободный. Почти все его предложения начинаются с изложения, за которым следует повторяющее его построение, и всё заканчивается заключением, как у Евклида (таковы предложения 1, 2, 3, 5, 7, 8). Мы придерживались более свободного перевода этих книг по сравнению с первыми тринадцатью книгами «Начал», где перевод был почти буквальным, но когда читатель встретит такие термины, как $\angle AB^\circ$, $AB \times BC$, радиус, дуга, то пусть он не думает, что здесь имеются какие-то отличия от Евклида; это те же самые, привычные нам $\angle \alpha \beta \gamma$, AB , $\text{т.е. } \alpha \beta$, AB , BC , $\alpha \beta$, $\alpha \beta \gamma$, $\alpha \beta \gamma \delta$, которые передавались нами как квадрат на AB , прямоугольник между AB , $B \gamma$, прямая из центра, обвод. Единственное отличие языка Гипсикла от евклидовского состоит в том, что он, например, пишет: $\alpha \beta \gamma \delta \epsilon \zeta \eta \theta$ — «и все трижды» (в нашем переводе: «возьмем то и другое трижды»). Эта не встречающаяся у Евклида терминология уже является предвестником начинающейся в математике эры вычислений. Таким образом, язык Евклида является своего рода *книж* — общим языком грече-

ской математики для всей эпохи после (а может быть и до) Евклида.

Книга XV по своим качествам значительно уступает четырнадцатой. Если в Гипsikле мы видим хоть и не гения, но во всяком случае хорошо математически образованного человека, то книга XV является произведением ученическим. Она даже не представляет единого целого, а состоит из трёх мало связанных друг с другом отрывков. В первом не очень вразумительно говорится о вписывании одних правильных тел в другие, второй интересен лишь своей темой, представляющей первый зародок того, что на русской почве вышло в значительную теорему Эйлера о многогранниках, наконец, третий — по качеству значительно лучший двух первых — трактует о нахождении двугранных углов между гранями правильных многогранников. Этот отрывок интересен тем, что в нём мы встречаем имя Исидора, в котором все исследователи видят Исидора Милетского, знаменитого математика и архитектора VI века н. э., одного из строителей храма св. Софии в Константинополе. Значит, книга XV представляет творение осенней поры античной математики, последнего её расцвета при Исидоре Милетском, эпохи Евтокия, комментатора и издателя Архимеда и Аполлония, созданий «*Scholiaz Vaticanae*» и «Начала» Евклида. Эта книга, создание конечной эпохи развития греческой математики, по праву заканчивает и одно из выдающихся её созданий — «Начала» Евклида.

(И. В.)

2. Формула Эйлера. Правильные тела понизятся в настоящее время в двух смыслах: метрическом, предполагающем грани правильные многоугольники с одинаковым числом равных сторон и правильные многогранные углы с тем же числом граней, и топологическом, предполагающем только равное число сторон у граней и равное число граней с тем же взаимным расположением однородных граней при вершине. Что правильных выпуклых тел только пять — это верно не только в метрическом, но и в топологическом смысле. Вывод основывается на известной формуле Эйлера, связывающей число граней, рёбер и вершин в выпуклом многограннике.

Формула Эйлера выражает теорему, устанавливающую инвариант при топологическом преобразовании геометрического объекта.

Это взаимно однозначное и взаимно непрерывное преобразование вообще превращает кривые в кривые, причём замкнутые в замкнутые и прямые в разомкнутые кривые, и плоскости в кривые поверхности, так что формула Эйлера остаётся в силе и при изгибании плоских граней. Если S , A и F суть соответственно число вершин, рёбер и граней выпуклого многогранника, то по формуле Эйлера

$$F + S = A + 2. \quad (1)$$

При доказательстве этой формулы сперва замечают, что для *открытого* многогранника, т. е. такого, который получается, если из *замкнутого* вынуть одну грань, имеет место соотношение

$$F + S = A + 1. \quad (2)$$

Это соотношение, конечно, справедливо при $F = 1$, т. е. если фигура обращается в плоский многоугольник, ибо тогда $S = A$ (в многоугольнике число сторон всегда равно числу вершин).

Далее применяется *принцип лямбд математики* к *λ*-индукции: если теорема, бывшая верной для фигуры с F гранями, верна и для фигур с $F + 1$ гранями, то она будет вообще верна.

Пусть $ABC\dots$ будет ломаная линия, ограничивающая многогранную фигуру. Строим на ребре $A'B'$ новую грань, имеющую n ребер и m углов. Если эта грань имеет m общих ребер с ломаной линией $ABCD$, то у неё оказывается уже $m + 1$ вершин общих с ней, если предположить, что фигура не замыкается, оставляя отверстие.

Поэтому числа F , S , A превращаются в следующие:

$$\begin{aligned} F' &= F + 1, \\ S' &= S + n - (m + 1), \\ A' &= A + n - m, \end{aligned}$$

и при подстановке в (2) получается тождество

$$F' + S' = A' + 1.$$

Теперь остается только перейти к *замкнутому* многограннику.

Если удалить одну грань в замкнутом многограннике, то получаем уже не замкнутый с числом граней $F - 1$, так что по (2)

$$F - 1 + S = A + 1,$$

откуда и вытекает формула Эйлера.

3. Топологически правильные тела. Существует только пять выпуклых многогранников, у которых грани имеют одно и то же число сторон, а многогранные углы — то же самое число граней или ребер.

В самом деле, в каждой грани имеется n вершин и n ребер, а во всех F гранях имеем $n \cdot F$ ребер. Но если учесть, что каждое ребро принадлежит двум граням, то действительное число ребер будет

$$A = \frac{n \cdot F}{2}.$$

Точно так же в каждой вершине сходятся m граней и m ребер, что даёт при S вершинах $m \cdot S$ ребер; если же учесть, что каждое ребро принадлежит двум вершинам, то фактическое число ребер будет

$$A = \frac{m \cdot S}{2}.$$

Следовательно,

$$2A = nF = mS. \quad (1)$$

Но по формуле Эйлера

$$A + 2 = F + S.$$

Из соотношений (1) и (2) получаем:

$$F = \frac{4m}{2(m+n) - mn}. \quad (3)$$

Если $n=3$, то уравнение (3) даёт

$$F = \frac{4m}{6-m}.$$

Отсюда видно, что m может получать только значения $m=3$, $m=4$, $m=5$, которым отвечают значения $F=4$, $F=8$, $F=20$ и соответствуют тела, топологически однородные с тетраэдром, октаэдром и икосаэдром. С точки зрения метрической эти тела можно назвать *неправильными* тетраэдром, октаэдром и икосаэдром.

Для $n=4$ и $n=5$ из равенства (3) получаем:

$$F = \frac{2m}{4-m} \quad \text{и} \quad F = \frac{4m}{10-3m}.$$

При этом для m возможно только значение $m=3$, что даёт $F=6$ и $F=12$, т. е. вообще *неправильные* гексаэдр и додекаэдр.

Если $n=6$, то

$$F = \frac{m}{3-m}.$$

Очевидно, что при $n=6$ F не может быть целым числом, тем более при $n > 6$.



ОГЛАВЛЕНИЕ

От издательства	5
Книга одиннадцатая	9
Книга двенадцатая	63
Книга тринадцатая	105
Книга четырнадцатая	142
Книга пятнадцатая	152
Комментарии к книге XI	163
Комментарии к книге XII	203
Комментарии к книге XIII	287
Комментарии к книгам XIV и XV	327
